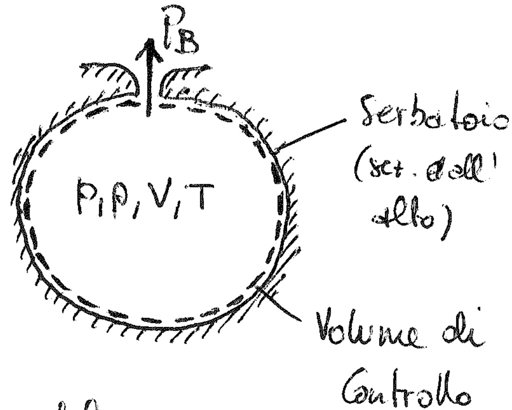
SVUOTAMENTO / RIEMPIMENTO DI UN SERBATOIO IN CONDIZIONI CRITICHE

Note sulle equazioni riportate in Dutton & Coverdill (1997)

• CASO A: Svuotamento in condizioni isoterme

Impostando il bilancio di massa del gas presente nel serbatoio si ottiene:



$$\begin{cases} \dfrac{dm}{dt} = \cancel{\dot{m}_{in}}^{\,0} - \dot{m}_{out} = -\dot{m}_{out} \\ \dot{m}_{out} = G_{out} \cdot A_t \end{cases}$$

con A_t = area della sezione di efflusso del gas

Per definizione $m \triangleq n \cdot M$. In condizioni isoterme:

$$pV \triangleq nRT \Rightarrow n = \frac{pV}{RT} \Rightarrow m = \frac{pV}{RT} \cdot M \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \frac{dp}{dt} \cdot \frac{MV}{RT}$$

In condizioni isoterme vale anche:

$$G_{out} = p\sqrt{\gamma \frac{M}{RT}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}$$

con
- p = pressione nel serbatoio
- T = temperatura nel serbatoio

Sostituendo le espressioni per dm/dt e G_{out} nell'equaz. di bilancio iniziale si trova:

$$\frac{MV}{RT} \cdot \frac{dp}{dt} = -p\sqrt{\gamma \frac{M}{RT}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} \cdot A_t$$

$$\frac{dp}{dt} = -p\sqrt{\gamma \frac{M}{RT}} \cdot \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cdot A_t \cdot \frac{RT}{MV}$$

EQ. DIFF. A VARIABILI SEPARABILI

Rielaborando:

$$\frac{dp}{dt} = -p\sqrt{\gamma\frac{RT}{M}}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cdot \frac{A_t}{V}$$ con V = vol. del serbatoio

Per definizione, la q.tà $\sqrt{\gamma RT/M} = \sqrt{\gamma P/\rho} \triangleq a$ velocità del suono del gas contenuto nel serbatoio. Risulta pertanto:

$$\frac{dp}{dt} = -p\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cdot \frac{A_t \cdot a}{V}$$ con $t_{char} \triangleq \frac{V}{A_t \cdot a}$

Separando le variabile (p e t) ed integrando si ha:

$$\int_{P_{iniziale}=P_{in}}^{p(t)} \frac{dp}{p} = \underbrace{-\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cdot \frac{1}{t_{char}}}_{COST.}\int_0^t dt$$

$$\ln\left[p(t)/p_{in}\right] = -\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cdot \frac{t}{t_{char}}$$

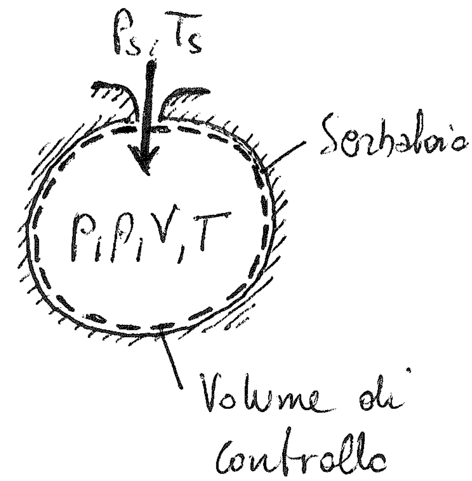
Definendo: $p^+ = p(t)/p_{in}$ e $t^+ = t/t_{char}$ si ottiene:

$$\boxed{p^+ = \exp\left[-\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cdot t^+\right]}$$

MODELLO PER SVUOTAMENTO CRITICO ISOTERMO DI UN SERBATOIO

GIRA →

• **CASO B** : riempimento in condizioni isoterme



Si parte sempre dal bilancio di massa per il gas contenuto nel serbatoio :

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{dt} = \dot{m}_{in} - \cancel{\dot{m}_{out}}^{\,0} = \dot{m}_{in} \\ \dot{m}_{in} = G_{in} \cdot A_t \end{cases}$$

Per definizione : $m = n \cdot M = \dfrac{pV}{RT} \cdot M \Rightarrow \dfrac{dm}{dt} = \dfrac{dp}{dt} \cdot \dfrac{MV}{RT}$

La portata specifica entrante G_{in} può essere convenientemente espressa in funzione di P_s e T_s, che rappresentano la pressione e la temperatura della "sorgente" usata per riempire il serbatoio [NOTA: nell'esercitazione di laboratorio, tale sorgente è il compressore!].

Il vantaggio di tale scelta sta nel poter assumere sia P_s che T_s costanti [NOTA: nell'esercitazione di laboratorio questo corrisponde ad equiparare il compressore ad un serbatoio di alimentazione molto grande, soggetto a trascurabili variazioni di pressione e temperatura durante il riempimento]. In definitiva, si può assumere:

$$G_{in} = P_s \sqrt{\gamma \frac{M}{RT_s} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}$$

Il bilancio di massa iniziale diventa:

$$\frac{dp}{dt} \cdot \frac{MV}{RT} = P_s \sqrt{\gamma \frac{M}{RT_s} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} \cdot A_t$$

Rielaborando:

$$\frac{dp}{dt} = P_s \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \underbrace{\sqrt{\gamma \frac{M}{RT_s}} \cdot \frac{RT}{MV} \cdot A_t}$$

$$\sqrt{\gamma \frac{M}{RT_s}} \cdot \frac{RT_s}{MV} \cdot \frac{T}{T_s} \cdot A_t = \sqrt{\gamma \frac{RT_s}{M}} \cdot \frac{T}{T_s} \cdot \frac{A_t}{V}$$

Per definizione:

- $a_s = \sqrt{\gamma \frac{RT_s}{M}} = \sqrt{\gamma \frac{P_s}{\rho_s}}$
- $t_{char} = \frac{V}{A_t\, a_s}$

Quindi:

$$dp = P_s \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{T}{T_s} \cdot \frac{dt}{t_{char}}$$

$$\int_{P_{iniziale} = P_{in}}^{p(t)} dp = P_s \cdot \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cdot \frac{T}{T_s} \int_0^t \frac{dt}{t_{char}}$$

$$p(t) - p_{in} = P_s \cdot \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cdot \frac{T}{T_s} \cdot \frac{t}{t_{char}}$$

Ponendo: $p(t)/P_s = p^+$; $P_{in}/P_s = P_i^+$; $T_i^+ = T/T_s$ e $t^+ = \frac{t}{t_{char}}$

si ottiene:

$$\boxed{p^+(t) = P_i^+ + T_i^+ \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cdot t^+}$$

MODELLO PER RIEMPIMENTO CRITICO ISOTERMO

- **CASO C** : svuotamento in condizioni adiabatiche

L'espressione iniziale del bilancio di massa è formalmente identico al caso isotermo (CASO A):

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{dt} = -\dot{m}_{out} = -G_{out} \cdot A_t \\ \dfrac{dm}{dt} = \dfrac{dp}{dt} \cdot \dfrac{MV}{RT} \end{cases} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -G_{out} \cdot A_t \cdot \frac{RT}{MV}$$

con p, V, T grandezze riferite al gas nel serbatoio.

In condizioni adiabatiche vale anche:

$$G_{out} = \sqrt{\gamma p \rho \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cdot \sqrt{\gamma p \rho}$$

Supponendo che il gas subisca una trasformazione adiabatica durante il processo di svuotamento, allora deve valere:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cost} \Rightarrow \frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_{in}}{\rho_{in}^\gamma} \Rightarrow \rho = \left(\frac{p}{p_{in}}\right)^{1/\gamma} \cdot \rho_{in}$$

con p_{in}, ρ_{in} pressione e densità iniziali del gas presente nel serbatoio ($p_{in} = p(t=0)$ e $\rho_{in} = \rho(t=0)$).

Dalla legge dei gas: $\rho_{in} = \dfrac{p_{in} \cdot M}{R T_{in}} \Rightarrow \rho = p^{1/\gamma} \cdot p_{in}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \cdot \dfrac{M}{RT_{in}}$

con T_{in} temperatura iniziale del gas nel serbatoio.

Sostituendo l'espressione per ρ nell'equaz. per G_{out} si ottiene:

GIRA →

$$G_{out} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cdot \sqrt{\gamma p \cdot \left[p^{1/\gamma} \cdot P_{in}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \cdot \frac{M}{RT_{in}}\right]}$$

$$= \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cdot p^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}} \cdot P_{in}^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \sqrt{\gamma \frac{M}{RT_{in}}}$$

Ritornando al bilancio di massa:

$$\frac{dp}{dt} = -\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cdot p^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}} \cdot P_{in}^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \sqrt{\gamma \frac{M}{RT_{in}}} \cdot A_t \frac{RT}{MV}$$

Come si vede, in tale bilancio compare la temperatura iniziale del gas, T_{in}, e la temperatura che questo ha al generico istante di tempo durante il processo di svuotamento, T.

Rielaborando:

$$\underbrace{\frac{dp}{dt}}_{f(t)} = -\underbrace{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}_{cost.} \cdot \underbrace{p^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}}_{f(t)} \cdot \underbrace{P_{in}^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}}_{cost.} \underbrace{\sqrt{\gamma \frac{RT_{in}}{M}}}_{\sqrt{\gamma \frac{P_{in}}{\rho_{in}}} = a_{in}} \cdot \frac{T}{T_{in}} \cdot \frac{A_t}{V}$$

(velocità sonica del gas all'istante iniziale)

$$\frac{dp}{dt} = -\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cdot p^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}} \cdot P_{in}^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \cdot \left(\frac{A_t \cdot a_i}{V}\right) \cdot \frac{T}{T_{in}}$$

Il rapporto T/T_{in} non è costante poiché T può variare nel tempo. Tale rapporto, però, può essere convenientemente riscritto in funzione del rapporto di pressioni P/P_{in} come segue:

GIRA →

$$\begin{cases} \dfrac{P}{\rho} = \dfrac{RT}{M} \\[2ex] \dfrac{P_{in}}{\rho_{in}} = \dfrac{RT_{in}}{M} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{P}{\rho T} = \frac{P_{in}}{\rho_{in} T_{in}} \quad \to \quad \frac{T}{T_{in}} = \frac{P}{\rho} \cdot \frac{\rho_{in}}{P_{in}}$$

$$\frac{P}{\rho^{\gamma}} = \frac{P_{in}}{\rho_{in}^{\gamma}} \Rightarrow \quad \frac{\rho_{in}}{\rho} = \left(\frac{P_{in}}{P}\right)^{1/\gamma} \Rightarrow \quad \frac{T}{T_{in}} = \frac{P}{P_{in}} \cdot \left(\frac{P_{in}}{P}\right)^{1/\gamma} = \left(\frac{P}{P_{in}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Sostituendo tale espressione nell'equazione differenziale per p si ottiene:

$$\frac{dp}{dt} = -\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cdot \underbrace{\left[p^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}+\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}_{p^{\frac{3\gamma-1}{2\gamma}}} \cdot \underbrace{\left[p_{in}^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}-\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}_{p_{in}^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}}} \cdot \frac{1}{t_{char}}$$

Separando le variabili ed integrando:

$$\int_{p_{in}}^{p(t)} \frac{dp}{p^{\frac{3\gamma-1}{2\gamma}}} = -\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cdot p_{in}^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} \int_{0}^{t} \frac{dt}{t_{char}}$$

$$\frac{2\gamma}{1-\gamma}\, p^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} \Big|_{p_{in}}^{p(t)} = -\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cdot p_{in}^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} \frac{t}{t_{char}}$$

Girare →

$$p(t)^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} - p_{in}^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} = -\left(\frac{1-\gamma}{2\gamma}\right)\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cdot p_{in}^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} \cdot \frac{t}{t_{char}}$$

$$p(t) = p_{in}\left[1-\left(\frac{1-\gamma}{2\gamma}\right)\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cdot \frac{t}{t_{char}}\right]^{\frac{2\gamma}{1-\gamma}}$$

Ponendo: $p^+(t) = p(t)/p_{in}$ e $t^+ = t/t_{char}$ si ottiene:

$$\boxed{p^+ = \left[1+\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}\right)\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cdot t^+\right]^{-\frac{2\gamma}{\gamma-1}}}$$

MODELLO DI SVUOTAMENTO ADIABATICO CRITICO

N.B. Nell'articolo Dutton & Coverdill il termine $\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}\right)$ è erroneamente scritto come $\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)$.

- <u>CASO D</u>: Riempimento in condizioni adiabatiche

Il bilancio di massa è lo stesso (formalmente) del caso isotermo (CASO B):

$$\frac{dp}{dt} = G_{in} \cdot A_t \frac{RT}{MV}$$

con $G_{in} = \sqrt{\gamma P_s \rho_s \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cdot P_s\sqrt{\gamma\frac{M}{RT_s}}$

La portata specifica entrante è nuovamente espressa in funzione della pressione e della temperatura della "sorgente" (il compressore, nel nostro caso).

Sostituendo si trova:

GIRA →

$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cdot p_s \sqrt{\gamma \frac{M}{RT_s}} \cdot A_t \cdot \frac{RT_s}{MV} \cdot \frac{T}{T_s}$$

$$= \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cdot p_s \cdot \underbrace{\left(\frac{A_t \cdot a_s}{V}\right)}_{1/t_{char}} \left(\frac{T}{T_s}\right)$$

Per procedere, è necessario ricavare un'espressione per il rapporto T/T_s. T è la temperatura del gas nel serbatoio durante il generico istante di riempimento mentre T_s è la temperatura della sorgente.

Dalla termodinamica, si sa che l'energia interna del gas deve bilanciare l'entalpia del gas alle condizioni di fornitura ovvero:

$$u_f = h_e \Rightarrow c_v \cdot T = c_p \cdot T_s \Rightarrow \frac{T}{T_s} = \frac{c_p}{c_v} = \gamma$$

Il modello prevede pertanto di assumere $T/T_s = \gamma$. In tal modo si ottiene:

$$\underbrace{\int_{p_{iniziale}=p_{in}}^{p(t)} dp}_{p(t)-p_{in}} = \gamma \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cdot p_s \cdot \frac{t}{t_{char}}$$

Ponendo: $p^+(t) = p(t)/p_s$, $p_i^+ = p_{in}/p_s$ e $t^+ = t/t_{char}$ si ha:

$$\boxed{p^+ = p_i^+ + \gamma \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cdot t^+}$$

MODELLO DI RIEMPIMENTO ADIABATICO CRITICO