

TENUTE AL MASTER INTERUNIVERSITARIO
DI II LIVELLO IN "INGEGNERIA CHIMICA
DELLA DEPURAZIONE DELLE ACQUE E
DELLE ENERGIE RINNOVABILI"

C. Marchidi

INTRODUZIONE AL DIMENSIONAMENTO DI
MASSIMA DI LINEE IDRAULICHE

INDICE

1. Proprietà dei fluidi (Generalità)
2. Statica dei fluidi
 - 2.1 Idrostatica
 - 2.2 Aerostatica
3. Esempi
4. Continuità e Bernoulli: equazioni di conservazione
5. Applicazione a misure di velocità e portata in tubazione
6. Dimensionamento di un circuito idraulico
7. Calcolo del diametro ottimo
8. Esercitazione

GENERALITA' SUI FLUIDI

Definizione: materiale che non sostiene sforzi di taglio in assenza di moto.



SPORZO DI TAGLIO : $\tau \sim F/A$

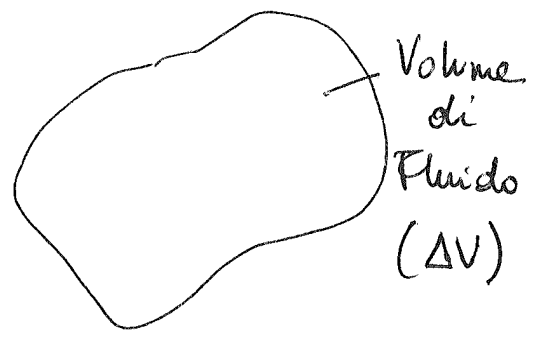
Le equazioni che vedremo valgono quindi per liquidi e gas ma anche plasma (=gas ionizzato) e solidi plastici.

Proprietà: densità $[\rho]$, viscosità dinamica $[\mu]$ e tensione superficiale $[\sigma]^*$

* tralasciamo!

DENSITA': $\rho \triangleq \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$

con $\Delta m =$ massa di fluido contenuta nel volume ΔV



Definizione basata sull'ipotesi del continuo.

⇒ EQ. DELLA STATICA : $\rho \vec{g} - \vec{\nabla} p = \vec{0}$

valido per un fluido in equilibrio statico.

ρ = densità del fluido [kg m^{-3}]

g = accelerazione gravitazionale [m/s^2]

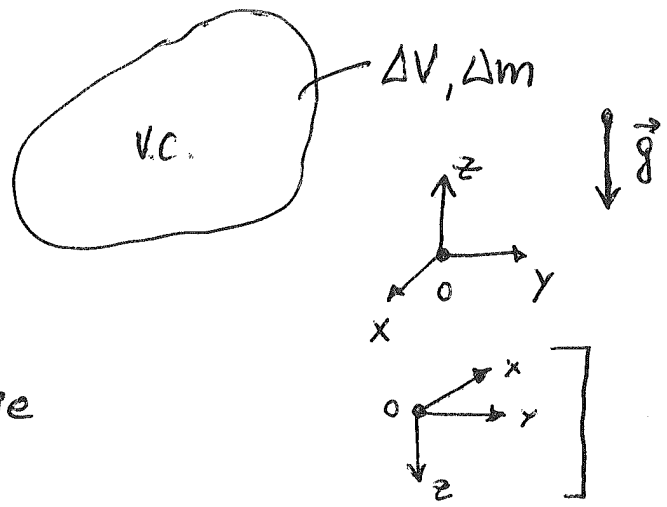
p = pressione [Pa]

$\vec{\nabla}$ = operatore vettoriale nabla [$\frac{\partial}{\partial x_i}$] } $\vec{\nabla} p = \text{grad}(p)$!

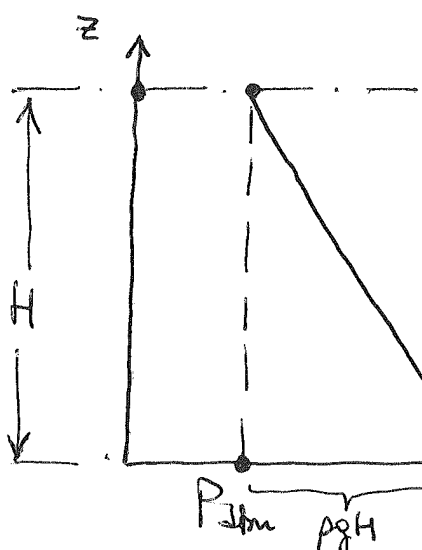
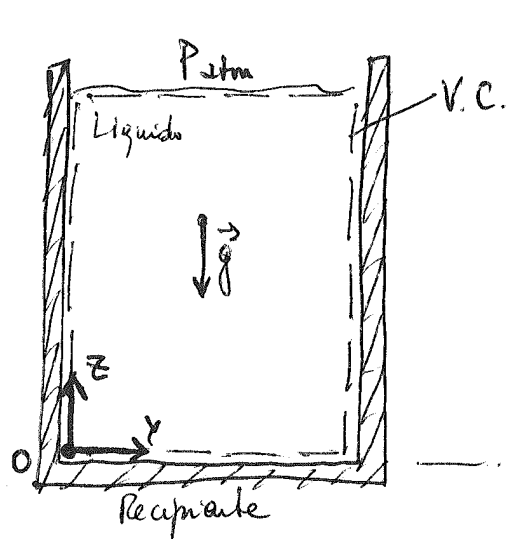
Tale equazione deriva da un bilancio di forze: \forall punto di un fluido in equilibrio statico (= in quiete) la somma delle forze agenti (FORZE DI SUPERFICIE dovute all'azione della pressione e FORZE DI VOLUME dovute all'azione della gravità) deve dare risultante nulla.

In forma scalare:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

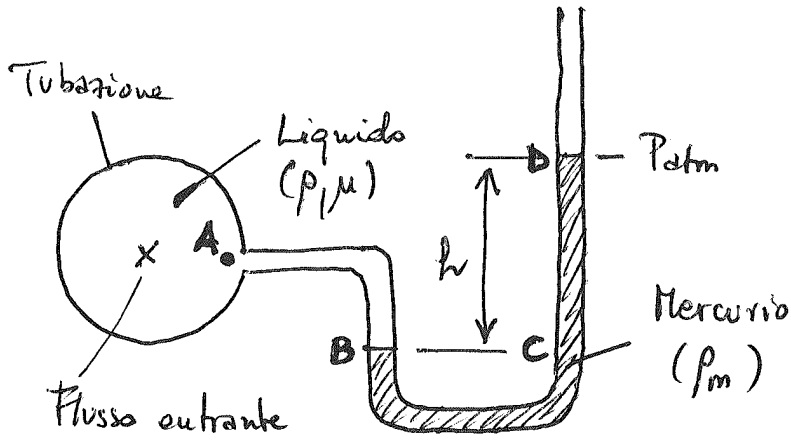


[N.B. $\frac{dp}{dz} = +\rho g$ se



$$p(z) = p_0 + \rho g z$$
$$[p(z=0) = P_{atm} + \rho g H]$$

ESEMPIO : Manometro ad U



$$P_A = P_B + \rho g h_{AB} \text{ con } h_{AB} = h_B - h_A$$

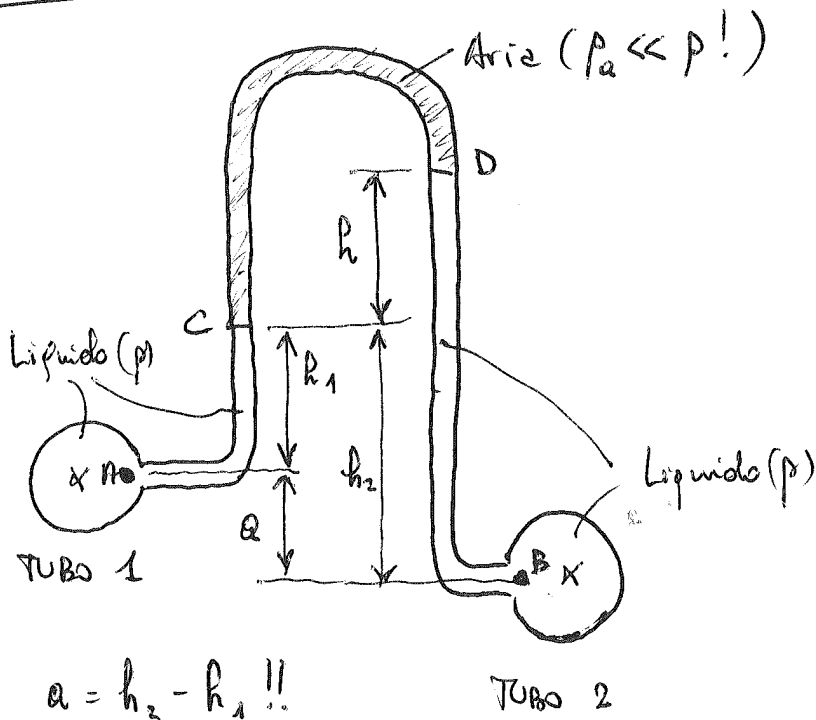
$$P_B = P_C$$

$$P_C = \underbrace{P_{atm}}_{P_D} + \rho_m g h$$

$$\boxed{P_A = P_{atm} + \rho_m g h + \rho g (h_B - h_A)}$$

Misurando le differenze di quota tra i vari punti si ha direttamente P_A all'interno della tubazione.

ESEMPIO : Manometro ad U inverso



$$P_A = P_C + \rho g h_1$$

$$P_C = P_D - \rho g h \approx P_D$$

$$P_D = P_B - \rho g (h + h_2)$$

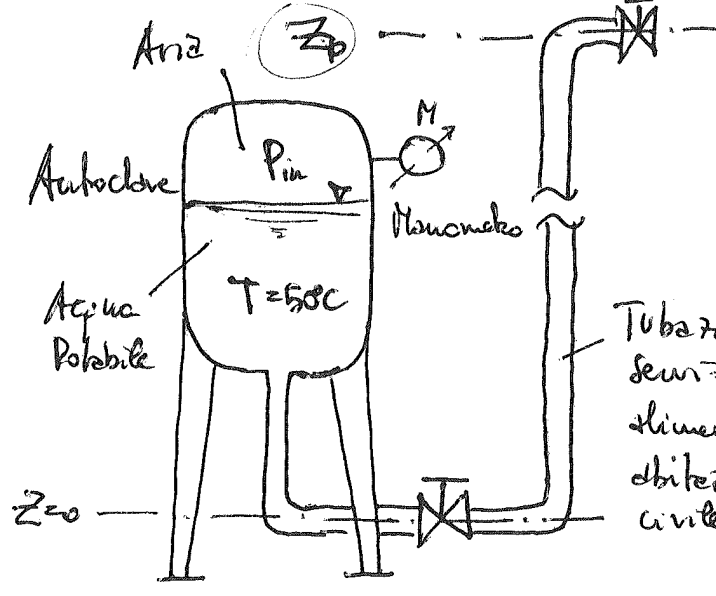
$$\boxed{P_B - P_A = \rho g (h + h_2 - h_1)}$$

ovvero

$$\boxed{P_B - P_A = \rho g (h + a)}$$

ESEMPIO : Autoclave

GIRA
→



Nota $p_{in} (= 4.5 \text{ bar})$, a quale quota geodetica z_p è teorica, ma è possibile erogare l'acqua?

$$p(z_p) = p(z=0) - \rho g z_p$$

$$p(z=0) = p(z_p) + \rho g z_p$$

$$= P_{atm} + \rho g z_p$$

Trascurando la differenza di quota tra livello zero e pelo libero dell'acqua nell'autoclave, in condizioni statiche risulta:

$$p(z=0) \approx p_{in} \Rightarrow z_p = \frac{p_{in} - P_{atm}}{\rho g} = \frac{\Delta p}{\rho g} \approx 35.4 \text{ m}$$

con $\rho = \rho(T=50^\circ\text{C})$!! La densità dipende dalla temperatura!

Per l'acqua: $\rho(T=50^\circ\text{C}) = 988,07 \text{ kg/m}^3$ (NON 10^3 kg/m^3)

ESEMPIO: Calcolo dell'andamento della pressione idrostatica (= agente su un gas)

↳ idrostatica se agente su un liquido

• $dp = -\rho g dz$ (EQ. STATICA)

• $\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M}$ (EQ. DI STATO DEI GAS PERFETTI)

|| $pV = nRT + \underbrace{m = \rho V = nM}_{V = \frac{nM}{\rho}}$

Siano: $p = p(z)$, $\rho = \rho(z)$, $T = T(z)$!

$$\rho(z) = \frac{M}{R} \cdot \frac{P(z)}{T(z)}$$

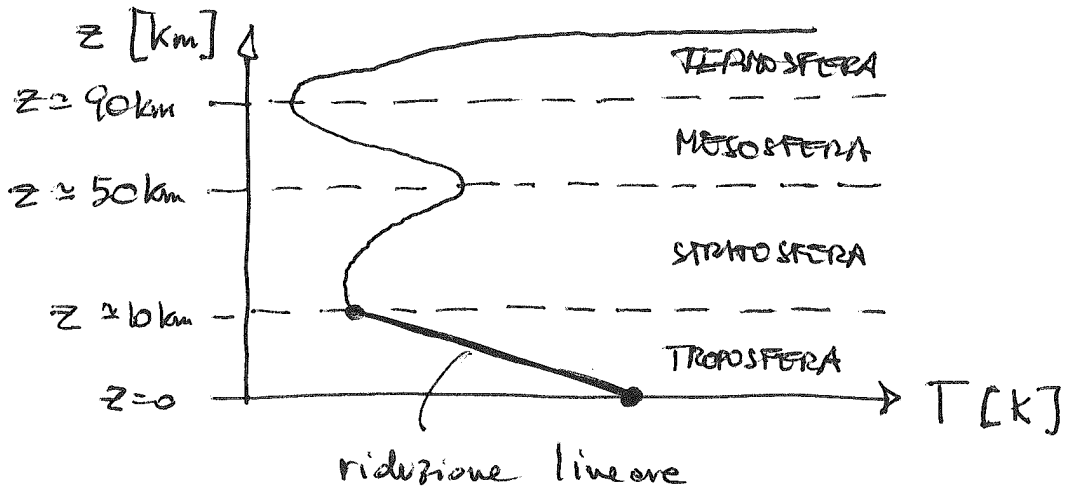
con $M = \text{massa molare } [kg/kmol]$

$$M = 29 \frac{kg}{kmol} \times \text{ARIA}$$

$R = \text{Costante universale}$

$$R = 8,314 \frac{kJ}{kmol \cdot K}$$

Possiamo ipotizzare un andamento di tipo lineare per $T(z)$ fino a quote $z \approx 10 \text{ km}$:



$$T(z) = T_0 - \alpha \cdot z$$

con $\alpha \approx 6.5 \cdot 10^{-3} \frac{K}{m}$

Sostituendo:

$$dp = - \frac{M}{R} \cdot \frac{P(z)}{T_0 - \alpha z} g dz \Rightarrow \frac{dp}{p(z)} = - \frac{Mg}{R} \cdot \frac{dz}{T_0 - \alpha z}$$

EQ. DIFF. VAR. SEP.

$$\int_{p(z=0)}^{p(z)} \frac{dp}{p} = - \frac{Mg}{R} \int_{z=0}^z \frac{dz}{T_0 - \alpha z} \Rightarrow \ln\left(\frac{p(z)}{p_0}\right) = + \frac{Mg}{R\alpha} \ln\left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0}\right)$$

In forma generale (ovvero se $z_0 \neq 0$):



$$p(z) = p_0 \left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0 - \alpha z_0} \right)^{\frac{Mg}{R\alpha}}$$

PRESSIONE
AEROSTATICA
(X GAS)

7

Tipicamente $p_0 = p_{atm}$!



$$\rho(z) = \rho_0 \left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0 - \alpha z_0} \right)^{\frac{Mg}{R\alpha} - 1}$$

DENSITA'
(X GAS)

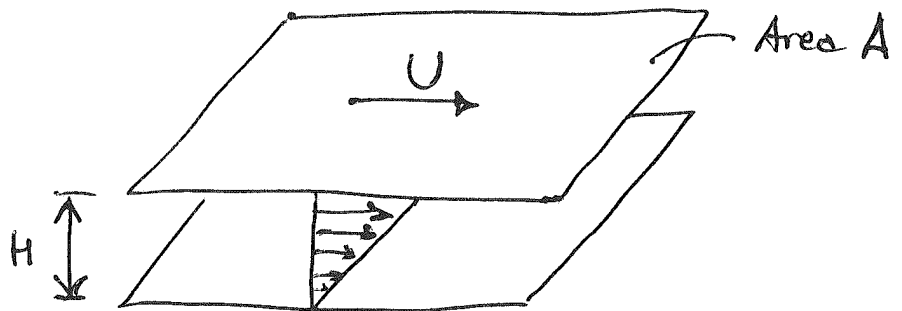
- VISCOSITA' : resistenza di un fluido allo scorrimento indotto da uno sforzo di taglio agente sul fluido medesimo.

μ [Pa·s] VISCOSITA' DINAMICA

Grandezza associata ad un fluido in movimento.

DEF. OPERATIVA :

$$\mu = \frac{F/A}{U/H}$$



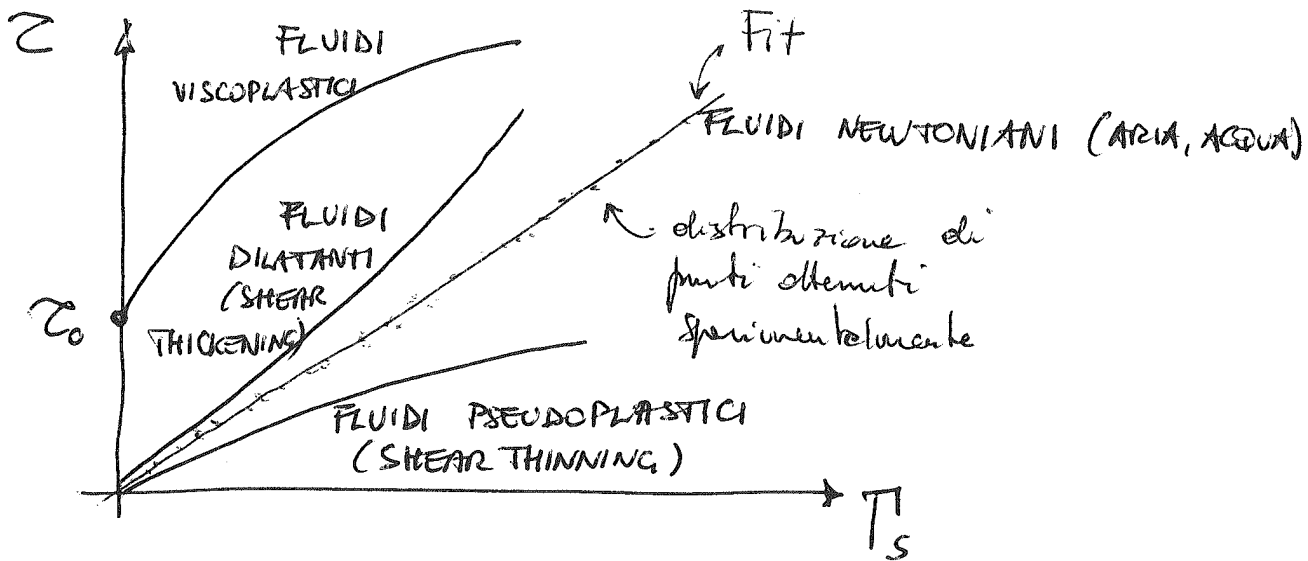
con $F/A = \tau$ [N/m² = Pa] SFORZO DI TAGLIO

$U/H = \Gamma_s$ [s⁻¹] TASSO DI SCORRIMENTO

A parità di τ , un fluido a minor viscosità presenta maggior Γ_s

ovvero scorre più facilmente.

8



Per fluidi Newtoniani $\frac{\gamma}{\tau_s} = \text{cost} \Rightarrow \boxed{\mu = \text{cost.}}$ a parità di temperatura. Ovviamente $\mu = \mu(T)!!$

SIGNIFICATO FISICO: la viscosità dinamica caratterizza la capacità di un fluido di diffondere quantità di moto in direzione normale al flusso. Più bassa è la viscosità, più facilmente diffonde la p.d.m. e più facilmente il fluido scorre per effetto dello sforzo di taglio applicato.

ν [m^2/s] VISCOSITÀ CINEMATICA

$$\boxed{\nu = \frac{\mu}{\rho}}$$

SIGNIFICATO: la viscosità cinematica caratterizza la capacità di un fluido di diffondere q.d.m. al suo interno (μ) rispetto alla capacità del fluido

medesimo di diffondere massa (ρ) sotto l'influenza della gravità.

	ρ [kg/m^3]	μ [$\text{Pa}\cdot\text{s}$]	ν [m^2/s]
ARIA	$\sim 10^0$ (1.2~1.3)	$\sim 2 \cdot 10^{-5}$	$\sim 2 \cdot 10^{-5}$
ACQUA	10^3	10^{-3}	10^{-6}

$\Rightarrow \mu_{\text{ARIA}} < \mu_{\text{ACQUA}}$

MA

$\nu_{\text{ARIA}} > \nu_{\text{ACQUA}}$

L'aria perciò è più difficile in un capillare rispetto per effetto della gravità.

	ρ	μ	ν
ACQUA	$\sim 10^3$	$\sim 10^{-3}$	$\sim 10^{-6}$
OLIO D'OLIVA	~ 900	$\sim 10^{-2}$	$\sim 10^{-4}$

$\Rightarrow \mu_{\text{ACQUA}} < \mu_{\text{OLIO}}$

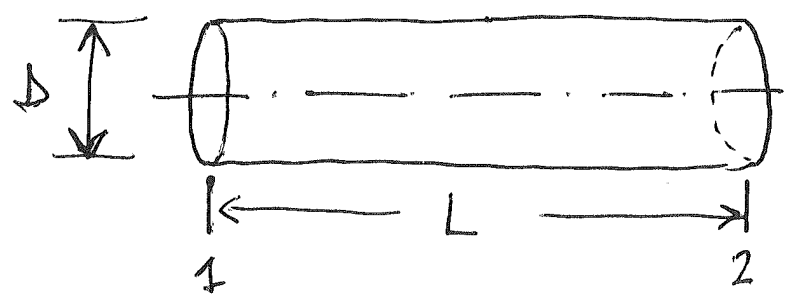
E

$\nu_{\text{ACQUA}} < \nu_{\text{OLIO}}$

DINAMICA DEI FLUIDI IN TUBAZIONE

Consideriamo un tratto di tubazione rettilinea orizzontale.

Vogliamo trasferire una certa portata massica m [kg/s] di fluido (ρ, μ)



da 1 a 2. Quale deve essere la variazione di pressione da 1 a 2 che garantisce il trasporto delle

portata desiderata?

10

PORTATA MASSICA : $\dot{m} = \rho \langle v \rangle \frac{\pi D^2}{4}$

con $\langle v \rangle =$ vel. media del fluido
nella tubazione

PORTATA VOLUMETRICA : $Q = \frac{\dot{m}}{\rho} = \langle v \rangle \frac{\pi D^2}{4}$

Poiché la massa di fluido che attraversa le diverse sezioni della tubazione (tra 1 e 2) si conserva (= non ci sono perdite di fluido attraverso la parete della tubazione) si ha:

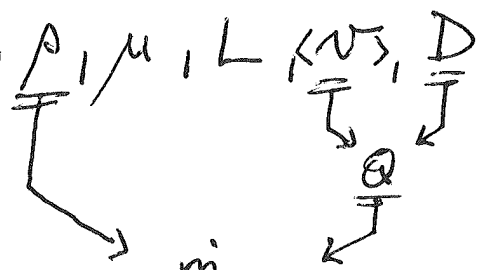
$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m} \Rightarrow Q_1 = Q_2 = Q$$

Quanto deve valere $P_1 - P_2 = |\Delta p|$ per trasportare Q ?

Rispondiamo nell'ipotesi che il nostro fluido sia Newtoniano ($\mu = \text{cost}$) ed incomprimibile ($\rho = \text{cost.}$)

Supponiamo poi che il flusso avvenga a basso numero di Mach.

Parametri del problema : $|\Delta p|, \rho, \mu, L, \langle v \rangle, D$



The diagram shows a horizontal pipe with a valve symbol on the left. An arrow points to the right from the pipe, labeled with \dot{m} . To the right of the pipe, there are two vertical arrows pointing downwards, labeled Q and D .

$m = 6$ parametri (1 incognito + 5 variabili)

Gli m parametri coinvolgono $n=3$ unità di misura (kg, m, s). 11

Il problema è completamente caratterizzato da $m-n=3$ GRUPPI ADIMENSIONALI, costruiti combinando opportunamente i parametri in gioco:

I° G.A. $\frac{|\Delta p|}{\rho U^2}$ contiene l'incognita $|\Delta p|$

II° G.A. $\frac{\rho U D}{\mu}$ contiene vel. e proprietà fisiche del fluido

III° G.A. $\frac{L}{D}$ contiene i parametri geometrici del problema



$$\boxed{\frac{|\Delta p|}{\rho U^2} = f\left(\frac{L}{D}, \frac{\rho U D}{\mu}\right)}$$

NB. $\langle U \rangle = U$!!

Con $\frac{\rho U D}{\mu} = Re$ NUMERO DI REYNOLDS

SIGNIFICATO FISICO :

$$\boxed{Re = \frac{F_{\text{INERZIA}}}{F_{\text{VISCOSO}}}}$$



$Re \rightarrow 0 \Rightarrow F_{INERZIA} \ll F_{VISCOSA}$ FLUSSO DI PURO SCORRIMENTO (CREEPING FLOW) 12
(caso tipico di flusso di fluidi molto viscosi)

$Re \rightarrow \infty \Rightarrow F_{INERZIA} \gg F_{VISCOSA}$ FLUSSO TURBOLENTO
(molto più frequente nel caso di circuiti idraulici)

$$\frac{|\Delta p|}{\rho v^2} = f\left(\frac{L}{D}, Re\right)$$

OSSERVAZIONE SPERIMENTALE: $|\Delta p|$ varia linearmente con $\frac{L}{D}$!

$$\frac{|\Delta p|}{\rho v^2} \propto \frac{L}{D} \cdot f(Re)$$

$$\boxed{\frac{|\Delta p|}{\rho} \propto f(Re) \cdot v^2 \frac{L}{D}} \quad \text{Verificata sperimentalmente}$$

CONVENZIONE DI MOODY (ING. CIVILI) $\Rightarrow \frac{|\Delta p|}{\rho} = \frac{1}{2} f(Re) v^2 \frac{L}{D}$

CONVENZIONE DI FANNING (ING. CHIMICI/MECCANICI)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{|\Delta p|}{\rho} = 2 f(Re) v^2 \frac{L}{D}}$$

Noi faremo riferimento alla convenzione di Fanning:

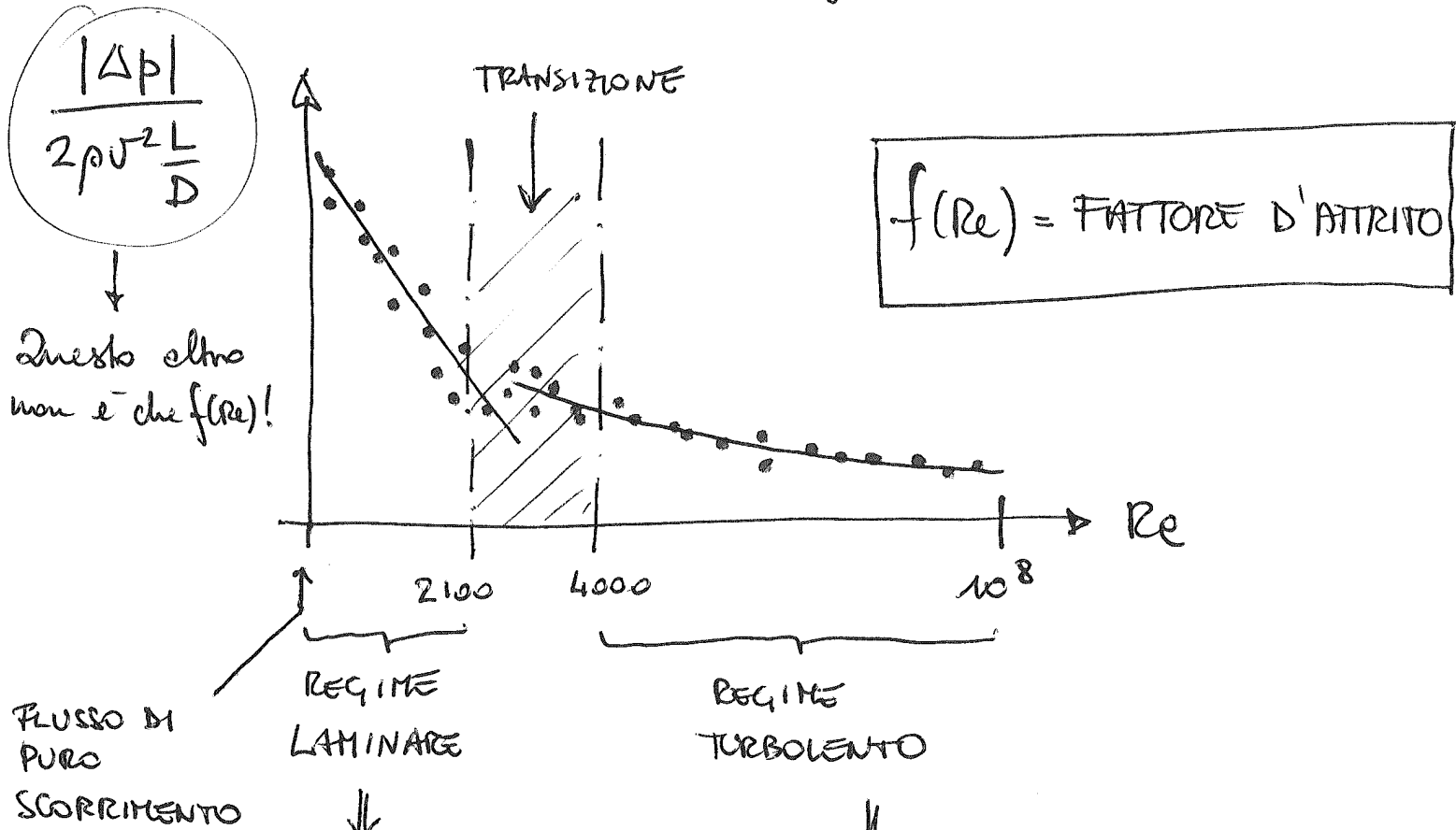
$$\frac{|\Delta p|}{\rho} = 2 f(Re) v^2 \frac{L}{D}$$

Facciamo una serie di esperimenti dove imponiamo ρ, μ, v, L e D e misuriamo $|\Delta p|$.

> Imponendo ρ, μ, v e D imponiamo Re !

> Imponendo v e D imponiamo Q !

Inseriamo le misure in un grafico del tipo:



$$\frac{|\Delta p|}{2\rho v^2 \frac{L}{D}} \equiv f(Re) = \frac{16}{Re}$$

$$\frac{|\Delta p|}{2\rho v^2 \frac{L}{D}} \equiv f(Re) = A \cdot Re^{-B}$$

In regime turbolento:

- TUBAZIONE LISCIA : $A = 0,079$ $B = 0,25$

$$f(Re) = 0,079 Re^{-0,25} \quad \text{BLASIUS}$$

- TUBAZIONE RUGOSA : $A = 0,04$ $B = 0,16$

$$f(Re) = 0,04 Re^{-0,16} \quad \text{TUBO COMMERCIALE}$$

Come diventa l'eq. di Fanning?

LAMINARE : $\frac{|\Delta p|}{2\rho v^2 \frac{L}{D}} = \frac{16}{Re} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{\pi}{128} \frac{|\Delta p| D^4}{\mu L}}$

RELAZ. DI HAGEN
POISEUILLE

TURBOLENTO LISCIO : $\frac{|\Delta p|}{2\rho v^2 \frac{L}{D}} = 0,079 Re^{-0,25}$

↓ :

$$|\Delta p| = 0,158 \rho^{0,75} \mu^{0,25} v^{1,75} \frac{L}{D^{1,25}}$$
$$|\Delta p| = 0,08 \rho^{0,84} \mu^{0,16} v^{1,84} \frac{L}{D^{1,16}}$$

TURBOLENTO RUGOSO :

Nel caso di FLUSSO TURBOLENTO e TUBO RUGOSO

esistono equazioni per il calcolo di $f(Re)$ più accurate che richiedono però una procedura di risoluzione di tipo iterativo. Es.

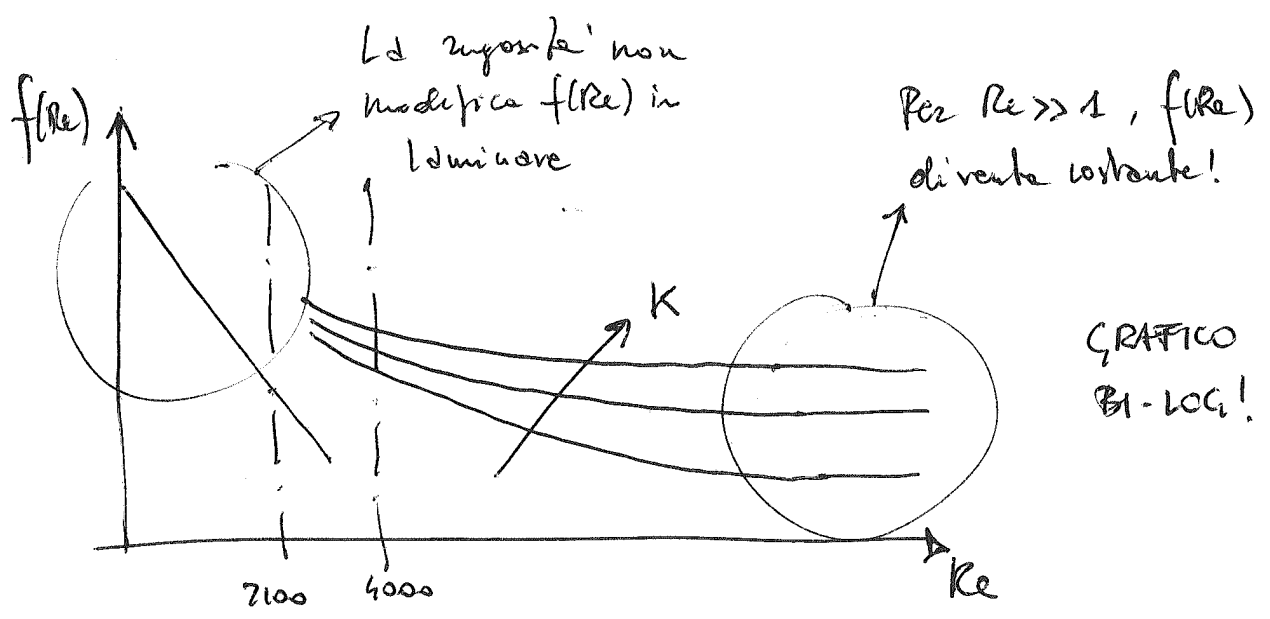
$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1,7 \ln \left[\frac{K}{D} + \frac{4,67}{Re \sqrt{f}} \right] + 2,28$$

Eq. di COLBROOK

INCOGNITA!

con $K = \frac{\epsilon}{D}$ RUGOSITA' RELATIVA

$\epsilon = \text{RUGOSITA' } [\mu\text{m}]$



NB: $f = f(Re, K)$ per tubo rugoso!

↑ NUOVO GRUPPO ADIMENSIONALE ($m=7, n=3$)

Le equazioni ricavate per $|\Delta p|$ sono utili per il dimensionamento delle reti (linee) idrauliche in quanto consentono di determinare le perdite di carico necessarie per trasportare una certa portata lungo una tubazione.

Tali perdite rappresentano la quota di energia meccanica che viene irreversibilmente dissipata in maniera distribuita lungo tutta la tubazione.

Sono infatti dette PERDITE DI CARICO DISTRIBUITE.

Un secondo tipo di perdita di carico è quella di tipo concentrato, in quanto è associata ad una discontinuità della linea idraulica (ad es. un restringimento improvviso di sezione, una curva a punto o a basso raggio di curvatura, una valvola parzialmente chiusa, etc.):

$$l_v^{TOT} = l_v^{DISTR.} + l_v^{CONC}$$

con $l_v^{CONC} = \frac{1}{2} K v^2$ ($K = \text{NUM. ALTEZZE CINETICHE}$)

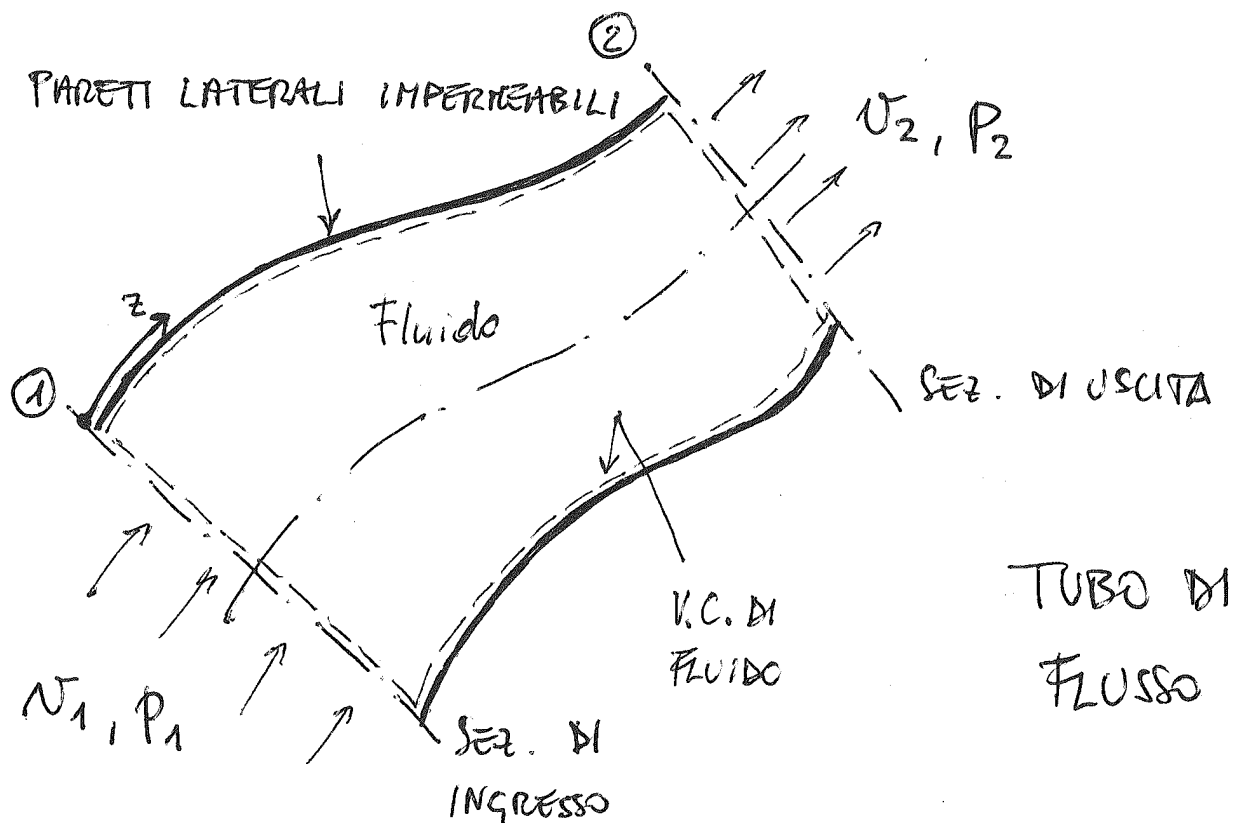
PERDITE DI CARICO
CONCENTRATE

Tali perdite rappresentano un termine particolarmente importante nell'EQUAZIONE DI BERNOULLI. [17]

Tale equaz. rappresenta e deriva dall'applicazione del principio di conservazione all'energia posseduta dal fluido internamente alle linee.

Assieme all'EQUAZIONE DI CONTINUITA', che deriva dall'applicazione del principio di conservazione alla massa di fluido, costituisce il set di equazioni da usare per il dimensionamento.

Vediamo tali equazioni. Anzitutto si applicano ad un volume di fluido con le seguenti caratteristiche:

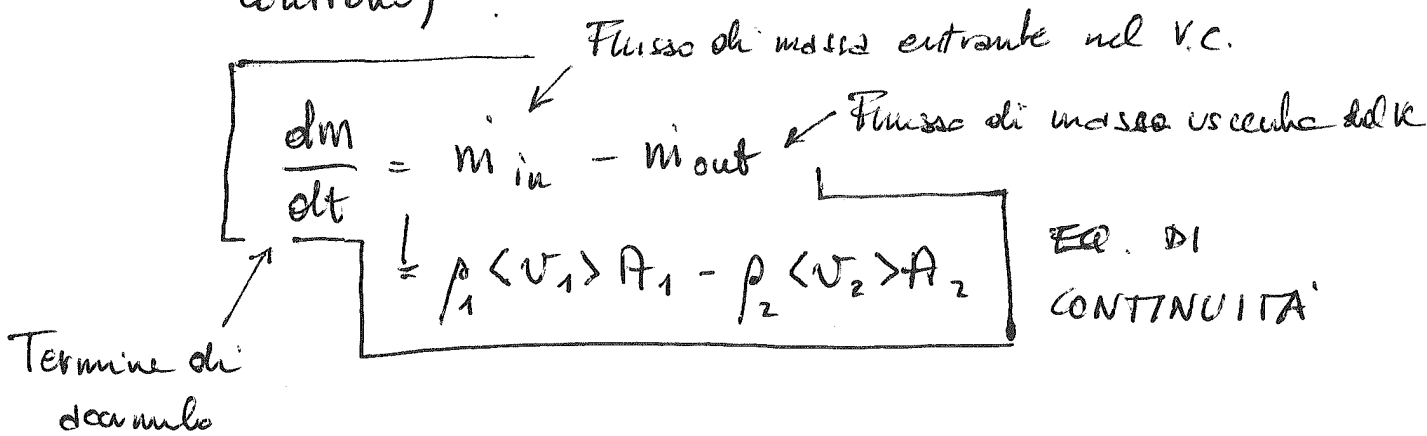


Principio di conservazione:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \Gamma_{in} - \Gamma_{out}$$

con Γ = proprietà del fluido.

① $\Gamma = m$ (massa di fluido contenuta nel volume di controllo)



STAZIONARIETA': $\frac{d}{dt} = 0 \Rightarrow \rho_1 \langle v_1 \rangle A_1 = \rho_2 \langle v_2 \rangle A_2$

② $\Gamma = E_{TOT}$ (energia totale per unità di massa di fluido)

↓ ... dopo "alcuni" passaggi...

$$\frac{1}{2} d(\alpha \langle v \rangle^2) + g dh + \frac{dp}{\rho} = dW_s - dL_v$$

EQ. DI BERNOULLI

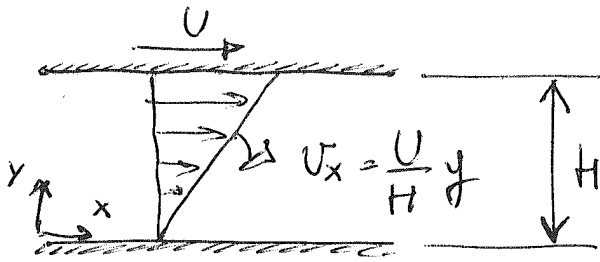
Variat. di en. cinetica del fluido (per unità di massa)	Variat. di en. potenziale	Variat. di en. piezometrica	Lavoro esterno netto	Perdite di en. meccanica
---	---------------------------	-----------------------------	----------------------	--------------------------

con $\alpha = \frac{\langle v^3 \rangle}{\langle v \rangle^3}$

→ $\alpha \approx 1$ PER FLUSSO TURBOLENTO

→ $\alpha \neq 1$ PER FLUSSO LAMINARE

Esempio di calcolo di α :



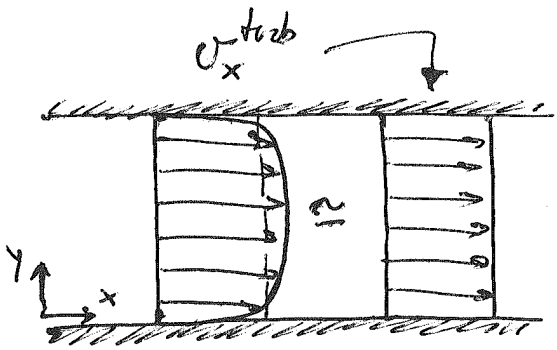
LAMINARE
COUETTE

$$v_x = \frac{U}{H} y \rightarrow v_x^3 = \left(\frac{U}{H} y\right)^3$$

$$\langle v_x \rangle = \frac{1}{H} \int_0^H v_x dy = \frac{1}{H} \int_0^H \frac{U}{H} y dy = \frac{U}{2}$$

$$\langle v_x^3 \rangle = \frac{1}{H} \int_0^H v_x^3 dy = \frac{1}{H} \int_0^H \left(\frac{U}{H} y\right)^3 dy = \frac{U^3}{4}$$

$$\langle v_x \rangle^3 = \left(\frac{U}{2}\right)^3 = \frac{U^3}{8} \neq \langle v_x^3 \rangle = \frac{U^3}{4}$$



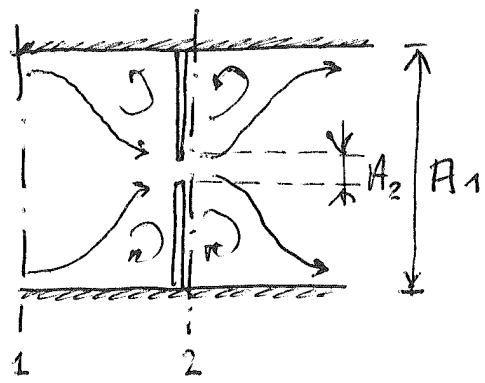
Se il profilo di velocità è piatto (o quasi) allora l'ordine secondo cui si media e/o si eleva al cubo è indifferente: il risultato finale è lo stesso.

• ESEMPI DI APPLICAZIONE DELLE EQ. DI CONSERVAZIONE PER MISURE DI VELOCITA' E PORTATA IN UNA TUBAZIONE

- Orifizio
- Tubo di Pitot
- Venturimetro
- + Perdite concentrate in un allargamento di sezione



• ORIFIZIO



CONTINUITA': $\langle v_1 \rangle A_1 = \langle v_2 \rangle A_2$

$(P_1 = P_2 !)$

BERNOULLI₁₂: $\frac{1}{2} \langle v_1 \rangle^2 + \frac{P_1}{\rho} = \frac{1}{2} \langle v_2 \rangle^2 + \frac{P_2}{\rho} + l_{v_{12}}$

$(h_1 = h_2, w_s = 0)$

Poiche' la distanza tra le sezioni 1 e 2 puo' essere assunta tale da rendere trascurabili le perdite distribuite si ha

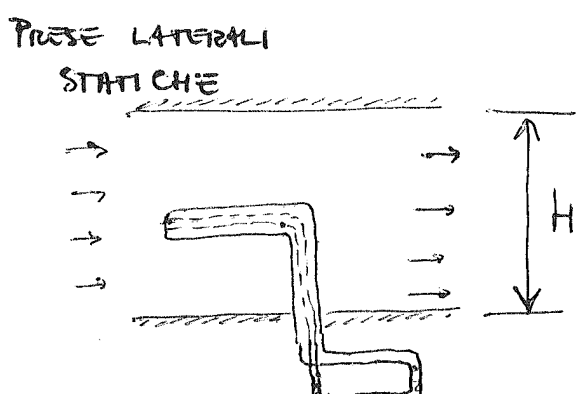
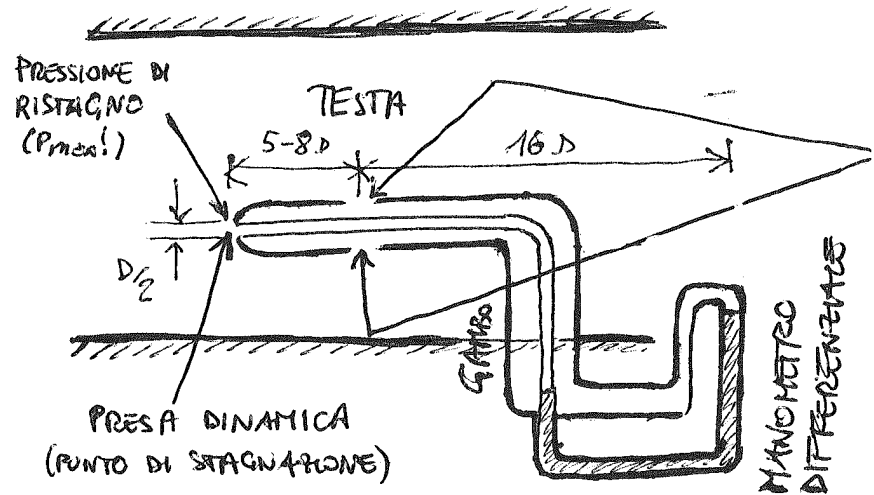
$l_{v_{12}} = \cancel{l_{v_{12}}} + l_{v_{12}}^{conc} = \frac{1}{2} K \langle v_2 \rangle^2$

con $K = 1.6 \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]$.

Risolvendo per $\langle v_2 \rangle$:

$$\langle v_2 \rangle = 0.877 \sqrt{\frac{P_1 - P_2}{\rho \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]}}$$

• PITOT



$$B_{12}: \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{\rho} + \frac{P_1}{\rho} = \frac{P_2}{\rho} + \frac{1}{2} v_2^2 \quad (v_2 = 0 \text{ perche' punto di stagnazione})$$

21

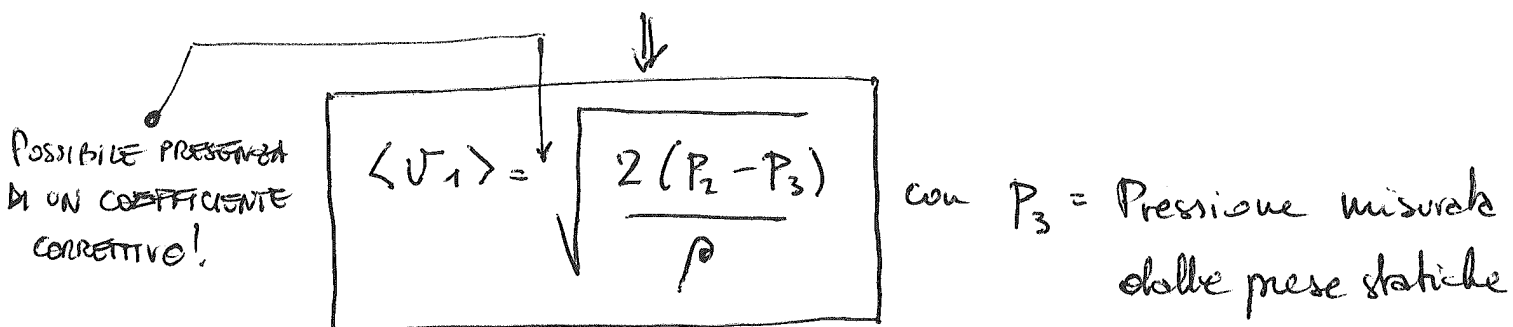
$[h_1 = h_2, w_s = 0, l v_{12} \approx 0]$ + FLUSSO TURBOLENTO ($v_i = 0$)

$$\langle v_1 \rangle = \sqrt{2 \left(\frac{P_2 - P_1}{\rho} \right)}$$

con $P_2 =$ Pressione di stagnazione

$$B_{13}: \frac{P_1}{\rho} = \frac{P_3}{\rho} \Rightarrow P_1 = P_3$$

$[\langle v_1 \rangle = \langle v_3 \rangle; h_1 = h_3; w_s = 0, l v \approx 0]$ + FLUSSO TURBOLENTO



NOTE :

1. Deve essere $D \ll H$ affinché l'inserimento del Pitot influenzi il meno possibile il flusso nella tubazione
2. L'ipotesi di flusso turbolento consiglia l'utilizzo del Pitot solo ad alti Re , caso in cui l'errore nelle misure è contenuto al massimo in qualche punto %.

↳ per questo viene anche usato per determinare la velocità relativa rispetto all'aria negli aerei ($Re \approx 10^6 \div 10^8$)

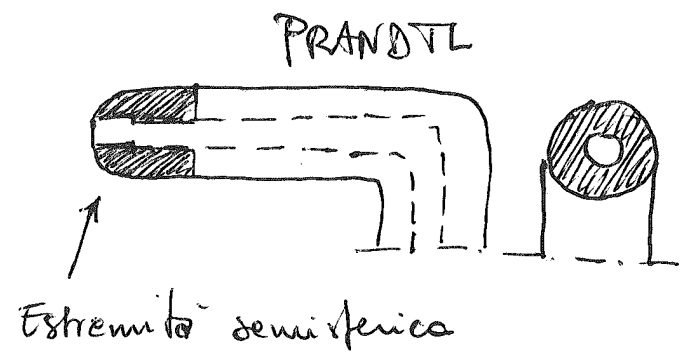
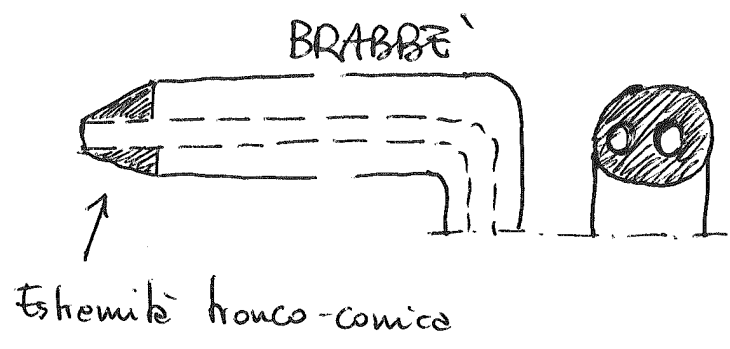
3. Affinchè esista il punto di stagnazione, il Pitot deve

sempre essere allineato con la direzione del flusso, altrimenti si sottoestima la vel. misurata.

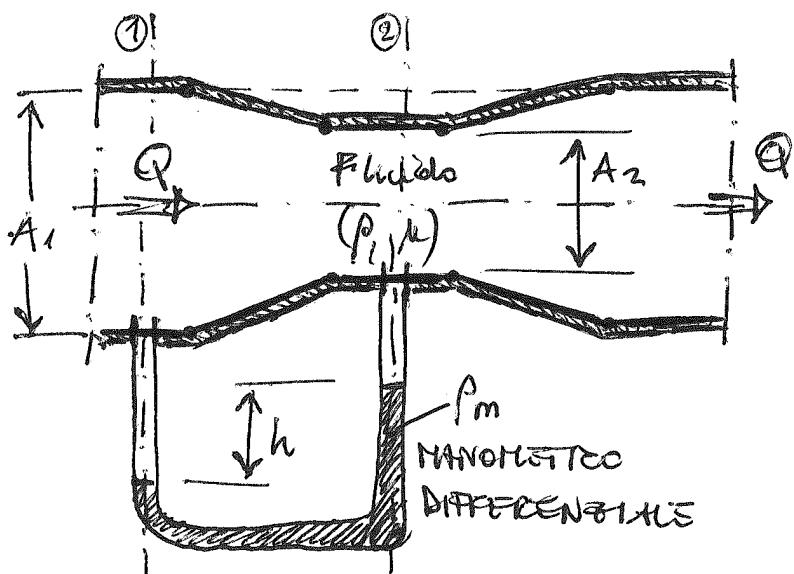
Per garantire l'allineamento, e' necessario e sufficiente muovere il Pitot fino a trovare la posizione in cui la vel. misurata e' massima.

4. l'accuratezza nella misura fornita dal Pitot aumenta se le pressioni rilevate dalle prese laterali (statiche!) variano lentamente. Se variano velocemente, la misura diventa meno accurata a causa dell'inerzia delle colonne di fluido nei condotti del Pitot.

5. tipologie di tubi di Pitot comunemente utilizzate:



• VENTURIMETRO



ORIZZONTALE

$Q = v_1 A_1 = v_2 A_2 = \text{cost}$

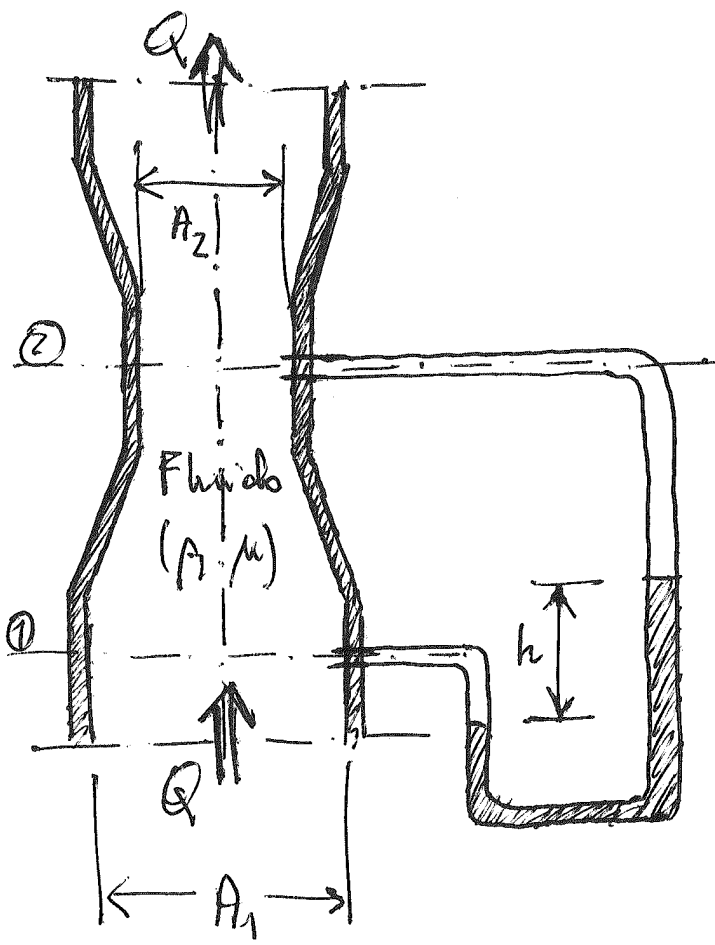
$$B_{12} : \frac{P_1 - P_2}{\rho} = \frac{1}{2} v_2^2 \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]$$

EQ. STATICA :

$P_2 = P_1 - \rho_m g h + \rho g h$

Velocità' ritardata
del venturimetro
(media sulla
sezione)

$$v_2 = \sqrt{2 \frac{(\rho_m - \rho)gh}{\rho} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]}}$$



VERTICALE

$$B_{12}: \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{P_1}{\rho} + gh_1 = \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{P_2}{\rho} + gh_2$$

$$v_2 = \sqrt{2 \frac{(\rho_m - \rho)gh + \rho g(h_2 - h_1)}{\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]}}$$

NOTA: Il restringimento di sezione nel venturimetro viene realizzato in maniera graduale, coniche risultino trascurabili eventuali perdite concentrate. Inoltre le sezioni 1 e 2 tra cui si applica Bernoulli sono ipotizzate sufficientemente vicine da dare luogo a perdite distribuite trascurabili. In sostanza $h_0 \approx 0$ in un Venturimetro.

Limite applicativo del Venturimetro: possibile 24
cavitazione nel restringimento per portate troppo elevate.

→ Se la sezione del restringimento è piccola e la portata elevata allora la velocità aumenta molto (per assicurare portata costante) mentre la pressione deve calare. Se la pressione scende sotto il valore di saturazione allora il liquido vaporizza (ovvero si formano bolle di vapore internamente al liquido).

→ conseguenze:

- elevate perdite di carico ($h_v \neq 0!$)
- danneggiamenti al condotto*

* le bolle si formano in una zona di bassa pressione. Passato il restringimento, la pressione risale e le bolle non le "reggono": quindi implodono provocando rumore e soprattutto vibrazioni.

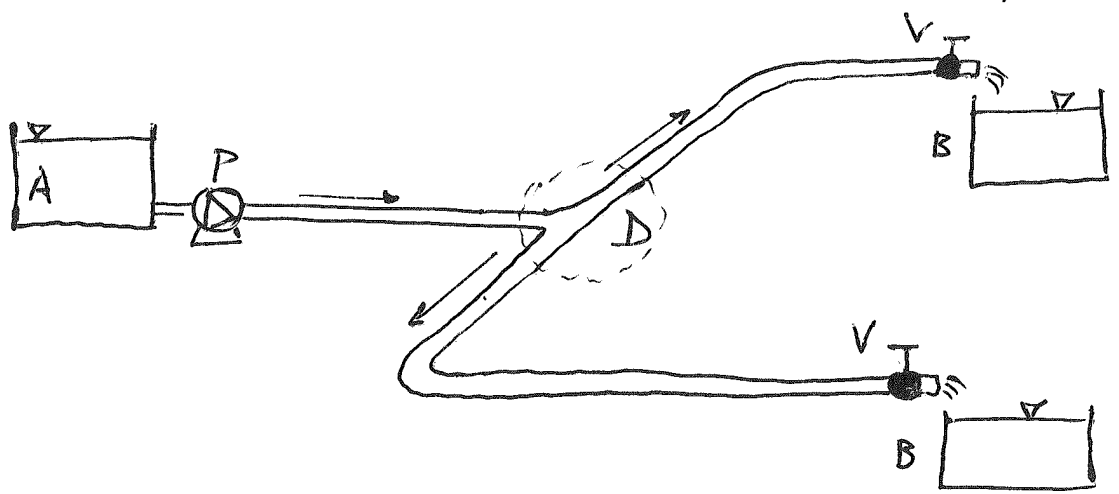
• DIMENSIONAMENTO DI UNA LINEA

IDRAULICA: REGOLE GENERALI

Una rete idraulica è generalmente costituita da una o più tratti di tubazione che collegano i punti tra cui è necessario trasportare il fluido.

La rete idraulica prevede poi l'installazione di una pompa per movimentare il fluido, di misuratori di portata per determinare la portata circolante e di valvole di regolazione per variare la portata (se necessario) e/o isolare rami della rete.

Esempio "standard" di rete (o linea) idraulica:



1 NODO (D) + 3 TRATTI DI TUBAZIONE (A → D, D → B, D → C)

Equazioni da usare per il dimensionamento:

EQ. DI CONTINUITA' AL NODO ⊕ EQ. DI BERNOULLI ∀ TRATTO

Nel nostro esempio : 4 equazioni in totale.

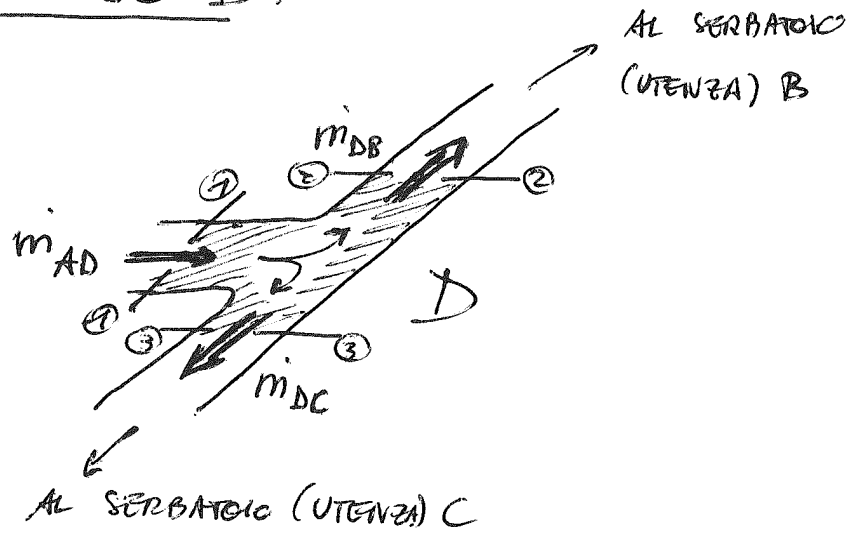
EQ. DI CONTINUITA' AL NODO D :

$$m_{in} = m_{out}$$

$$m_{AD} = m_{DB} + m_{DC}$$

$$\rho v_{AD} \frac{\pi D_{AD}^2}{4} = \rho v_{DB} \frac{\pi D_{DB}^2}{4} + \rho v_{DC} \frac{\pi D_{DC}^2}{4}$$

FLUIDO INCOMP. ↓



Ipotizziamo che la separazione delle portate avvenga internamente al nodo D, tra le sez. ①, ② e ③

$$v_{AD} D_{AD}^2 = v_{DB} D_{DB}^2 + v_{DC} D_{DC}^2 \quad [Q_{AD} = Q_{DB} + Q_{DC}]$$

↓ Diametro della tubaz. nel tratto D → B
 ↓ Vel. media del fluido nel tratto D → B
 ↓ Diametro della tubazione nel tratto A → D

Vel. media del fluido nel tratto A → D

↓ Se $D_{AD} = D_{DB} = D_{DC}$

$$v_{AD} = v_{DB} + v_{DC} \quad [\sum v_{in} = \sum v_{out}]$$

EQ. DI BERNOULLI NEI VARI TRATTI :

$$\textcircled{B_{A \rightarrow D}} : \frac{1}{2} v_A^2 + g h_A + \frac{P_A}{\rho} + W_s = \frac{1}{2} v_D^2 + g h_D + \frac{P_D}{\rho} + l v_{A \rightarrow D} \quad | 27$$

Sez. A : sul pelo libero del serbatoio A

↳ $v_A \approx 0$ (pelo libero fermo)

↳ $P_A \approx P_{atm}$ (serbatoio aperto)

Sez D : coincide con la sez. ① della figura precedente, preso subito a monte del nodo ($v_D = v_{AD}$)

Se il circuito è piano (no variazioni di quota) allora $h_A = h_D$, altrimenti $h_A \neq h_D$!

W_s = prevalenza fornita dalla pompa

↳ $\boxed{\text{Pot} = m_{AD} \cdot W_s}$ POTENZA FORNITA DALLA POMPA AL FLUIDO

$l v_{A \rightarrow D}$ = perdite di carico (= perdite di en. meccanica)

nel tratto

$$l v_{A \rightarrow D} = l v_{A \rightarrow D}^{\text{DISTR.}} + l v_{A \rightarrow D}^{\text{CONC}} = 2 \int_{A \rightarrow D} v_{AD}^2 \frac{L_{AD}}{D_{AD}} + \frac{1}{2} K v_{AD}^2$$

$$\textcircled{B_{D \rightarrow B}} : \frac{1}{2} v_D^2 + g h_D + \frac{P_D}{\rho} + W_s = \frac{1}{2} v_B^2 + g h_B + \frac{P_B}{\rho} + l v_{D \rightarrow B}$$

sez. D: coincide con la sez. ② della figura, presa subito a valle del modo ($v_D = v_{DB}$ stesso!)

sez. B: sul pelo libero del serbatoio B

$\hookrightarrow v_B \approx 0$

$\hookrightarrow p_B \approx p_{atm}$

Anche qui $h_D = h_B$ sse circuito pieno.

$W_s = 0$ (\nexists pompa installata nel tratto D \rightarrow B)

$$h_{D \rightarrow B} = 2 f_{D \rightarrow B} v_{DB}^2 \frac{L_{DB}}{D_{DB}} + \frac{1}{2} K v_{DB}^2$$

$\hookrightarrow f_{D \rightarrow B} =$

- $\frac{16}{Re_{DB}}$ se $Re_{DB} < 2100$
- $0,079 Re_{DB}^{-0,25}$ se $Re_{DB} > 4000$ e TUBO LISCIO
- $0,04 Re_{DB}^{-0,25}$ se $Re_{DB} > 4000$ e TUBO RUGOSO

N.B. Ogni tratto ha associato un diverso valore del numero di Reynolds:

(oppure si usano formule tipo Colebrook)

$$Re_{DB} = \frac{\rho v_{DB} D_{DB}}{\mu} \neq Re_{AD} = \frac{\rho v_{AD} D_{AD}}{\mu} \neq Re_{DC} = \frac{\rho v_{DC} D_{DC}}{\mu}$$

$B_{D \rightarrow C}$: $\frac{1}{2} v_{Dc}^2 + gh_D + \frac{P_D}{\rho} = gh_C + \frac{P_{atm}}{\rho} + l v_{D \rightarrow C}$

sez. D: coincide con la sez. ③ di figura, presa subito a valle del nodo ($v_D = v_{Dc}$!)

sez. C: sul pelo libero del serbatoio C

$\hookrightarrow v_C = 0$

$\hookrightarrow P_C = P_{atm}$

$l v_{D \rightarrow C} = \alpha \int_{D \rightarrow C} v_{Dc}^2 \frac{L_{Dc}}{D_{Dc}} + \frac{1}{2} k v_{Dc}^2$

NOTA SULLE PERDITE l_v : ipotizziamo flusso turbolento e tubo liscio, per fissare le idee. Avremo:

$l_v = 2 \cdot 0,078 \left(\frac{\rho v D}{\mu} \right)^{-0,25} v^2 \frac{L}{D} + \frac{1}{2} k v^2$

$= 0,158 \rho^{-0,25} \mu^{0,25} v^{1,75} \frac{L}{D^{1,25}} + \frac{1}{2} k v^2$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{f(v^{1,75})} \quad \underbrace{\hspace{5em}}_{f(v^2)}$

Se v è l'incognita del problema di dimensione L e tempo, la presenza contemporanea di $v^{1,75}$ e v^2 impone una risoluzione per tentativi dell'eq. di

Bernoulli. Per evitare iterazioni, è lecito 30
trascurare i termini cinetici ($\frac{1}{2}v^2$) in tale equazio-
ne, avendo così l'incognita v nel solo termine
di perdita h_v (come $v^{1,75}$).

Tale ipotesi va verificata a posteriori, una volta
calcolata v , guardando gli ordini di grandezza
dei termini presenti nell'eq. di Bernoulli.

Per velocità del fluido nelle linee di $1 \div 2$ m/s
tale ipotesi è generalmente valida (e assicura buone
accuratezze nel dimensionamento). In effetti, se
consideriamo il caso di trasporto di acque vere:

- $v \sim O(1) \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 \sim O(1)$

- $p \sim O(10^5)$

- $\rho \sim O(10^3) \Rightarrow \frac{p}{\rho} \sim O(10^2) \quad [100 \text{ volte } \frac{1}{2}v^2]$

- $g \sim O(10)$

- $h \sim O(1 \div 10) \Rightarrow gh \sim O(10 \div 10^2) \quad [10 \div 100 \text{ volte } \frac{1}{2}v^2]$

CALCOLO DEL DIAMETRO OTTIMO 131

Il diametro ottimo è il diametro della tubazione che minimizza il costo totale C_{TOT} che si deve sostenere per realizzare e far funzionare la linea idraulica.

$$C_{TOT} = C_T + C_P + C_E \quad \text{FUNZ. DI COSTO TOTALE}$$

$$C_T = K_T \cdot L \cdot D \quad \text{COSTO DELLA TUBAZIONE [€]}$$
$$K_T = \left[\frac{\text{€}}{\text{m}^2} \right] \quad \text{COSTO DELLA TUBAZIONE AL METRO QUADRO}$$

L = LUNGHEZZA DELLA TUBAZIONE DA INSTALLARE

D = DIAMETRO DELLA TUBAZIONE DA INSTALLARE

$$C_P = K_P \cdot Pot \quad \text{COSTO DELLA POMPA [€]}$$
$$K_P = \left[\frac{\text{€}}{\text{kW}} \right] \quad \text{COSTO DELLA POMPA PER kW INSTALLATO}$$

Pot = POTENZA DELLA POMPA



$C_E = K_E \cdot Pot \cdot N_h \cdot N_y$ COSTO DI ESERCIZIO [€]

$K_E = \left[\frac{€}{kWh} \right]$ COSTO DELLA LINEA PER kWh CONSUMATO

$N_h = N^o$ DI ORE DI FUNZIONAMENTO DELLA LINEA IN UN ANNO

$N_y = N^o$ DI ANNI DI FUNZIONAMENTO DELLA LINEA



$G_{TOT} = \underbrace{K_T \cdot L \cdot D}_{cost.} + \underbrace{(K_P + K_E N_h N_y)}_{cost.} Pot = f(D, Pot)$

K_T, L, K_P, N_h e N_y sono dati noti del problema di dimensionamento.

Per calcolare D ottima si impone la condizione:

$\frac{dG_{TOT}}{dD} = 0$

CONDIZIONE DI MINIMO COSTO

Risolvendo l'equazione così ottenuta, in funzione di D (che sarà l'unica incognita ivi contenuta)

si trova il valore ottimo che minimizza G_{TOT} .

PROBLEMA: per calcolare $\frac{dC_{TOT}}{dD}$ è necessario avere

$C_{TOT} = f(D)$ e basta. Noi invece abbiamo

$C_{TOT} = f(D, Pot)$.

SOLUZIONE: bisogna esprimere la potenza della pompa in funzione del diametro: $Pot = f(D)$!

ESEMPIO DI CALCOLO DI $Pot = f(D)$:

Ipotesi: • linea idraulica piena (no variaz. di quota)

• Prevalenza = Perdite di carico distribuite ($w_s = l_v$) nel tratto della pompa

• flusso turbolento ($f = ARe^{-B}$)

$$Pot = m \cdot w_s = \rho v \frac{\pi D^2}{4} \cdot 2f v^2 \frac{L}{D} = \frac{\pi}{2} \rho v^3 \frac{L}{D} D^2 A Re^{-B}$$

$$= \frac{\pi}{2} \rho^{1-B} \mu^B v^{3-B} L D^{1-B} \cdot A \quad \leftarrow v = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

$$= \frac{A\pi}{2} \rho^{1-B} \mu^B \left(\frac{4Q}{\pi}\right)^{3-B} L \cdot D^{B-5} = C_1 D^{B-5}$$

COST.



$$C_{TOT} = \underbrace{(K_T \cdot L)}_{K_1} \cdot D + \underbrace{[(K_P + K_Z N_R N_y) \cdot C_1]}_{K_2} \cdot D^{B-5}$$

$$\frac{dC_{TOT}}{dD} = K_1 + (B-5)K_2 D^{B-6} = 0$$

$$D = \left[\frac{K_1}{(5-B)K_2} \right]^{\frac{1}{B-6}} = D_{ottimo}$$

Se $f = 0,079 Re^{-0,25}$ allora :

$$D_{ottimo} = \left[\frac{K_T L}{4,75 (K_p + K_E N_R N_y) C_1} \right]^{\frac{1}{5,75}}$$

con $C_1 = \frac{0,079 \pi}{2} \rho^{0,75} \mu^{0,25} \left(\frac{4Q}{\pi} \right)^{2,75} L$

Se $f = 0,04 Re^{-0,16}$ allora :

$$D_{ottimo} = \left[\frac{K_T L}{4,84 (K_p + K_E N_R N_y) C_1} \right]^{\frac{1}{5,84}}$$

con $C_1 = \frac{0,04 \pi}{2} \rho^{0,84} \mu^{0,16} \left(\frac{4Q}{\pi} \right)^{2,84} L$

• ESERCITAZIONE : [http://158.110.32.35/LAB/SITO-WEB/Perdite di carico in regime monofase.htm](http://158.110.32.35/LAB/SITO-WEB/Perdite%20di%20carico%20in%20regime%20monofase.htm)