

Soluzione Homework N° 6

a. \_\_\_\_\_

1. Couette:  $v_x = Uy/H$ .

$$\langle v_x \rangle = \frac{U}{2}$$

$$\langle v_x \rangle^2 = \frac{U^2}{4}$$

$$\langle v_x \rangle^3 = \frac{U^3}{8}$$

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{H} \cdot \frac{U^2}{H^2} \int_0^H y^2 dy = \frac{U^2}{3}$$

$$\langle v_x^3 \rangle = \frac{1}{H} \cdot \frac{U^3}{H^3} \int_0^H y^3 dy = \frac{U^3}{4}$$

Si trova:

$$\frac{\langle v_x \rangle^2}{\langle v_x^2 \rangle} = \frac{3}{4} \rightarrow \beta = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\langle v_x \rangle^3}{\langle v_x^3 \rangle} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 2$$

2. Poiseuille:  $v_x = \frac{H^2}{8\mu} \left(-\frac{dP}{dx}\right) \left[1 - \frac{4y^2}{H^2}\right]$ .

$$\langle v_x \rangle = \frac{H^2}{12\mu} \left(-\frac{dP}{dx}\right)$$

$$\langle v_x \rangle^2 = \frac{H^4}{(12\mu)^2} \left(-\frac{dP}{dx}\right)^2$$

$$\langle v_x \rangle^3 = \frac{H^6}{(12\mu)^3} \left(-\frac{dP}{dx}\right)^3$$

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{H^4}{(8\mu)^2} \left(-\frac{dP}{dx}\right)^2 \frac{1}{H} \int_{-H/2}^{+H/2} \left(1 - \frac{4y^2}{H^2}\right)^2 dy = \frac{8H}{15}$$

$$\langle v_x^3 \rangle = \frac{H^6}{(8\mu)^3} \left(-\frac{dP}{dx}\right)^3 \frac{1}{H} \int_{-H/2}^{+H/2} \left(1 - \frac{4y^2}{H^2}\right)^3 dy = \frac{16H}{35}$$

Si trova:

$$\frac{\langle v_x \rangle^2}{\langle v_x^2 \rangle} = \frac{5}{6} \rightarrow \beta = \frac{6}{5}$$

$$\frac{\langle v_x \rangle^3}{\langle v_x^3 \rangle} = \frac{35}{54} \rightarrow \alpha = 1.543$$

b. \_\_\_\_\_

Il vettore vorticità è pari a

$$\omega = \text{rot} \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \mathbf{k} \quad (1)$$

dove

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (2)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (3)$$

per cui risulta

$$\omega = \frac{-x^2 + y^2 + x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \quad (4)$$

La divergenza è data da:

$$\text{div}(v) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \quad (5)$$

c. \_\_\_\_\_

Le espressioni delle componenti del vettore velocità sono date da:

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (6)$$

$$v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7)$$

ed anche

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = -u dx - v dy \quad (8)$$

Le linee equipotenziali sono rappresentate da  $d\phi = 0$  e quindi

$$0 = -u dx - v dy \rightarrow \frac{u}{v} = -\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\phi=\text{cost.}} \quad (9)$$

Analogamente per  $\psi$ :

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = v dx - u dy \quad (10)$$

Le linee di corrente costanti sono rappresentate da  $d\psi = 0$

$$0 = vdx - udy \rightarrow \frac{v}{u} = \left( \frac{dy}{dx} \right)_{\psi=\text{cost.}} \quad (11)$$

La relazione che lega le pendenze delle tangenti alle linee equipotenziali e a quelle di corrente risulta:

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{\psi} = - \frac{1}{\left( \frac{dy}{dx} \right)_{\phi}} \quad (12)$$

dalla quale si può dedurre l'ortogonalità dei due insiemi di linee.

d. 

---

Le componenti di velocità secondo gli assi  $x$  ed  $y$  sono

$$u = \Omega x \quad (13)$$

$$v = -\Omega y \quad (14)$$

per cui si ottiene che

$$\omega = \text{rot} \mathbf{v} = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} = 0 \quad (15)$$

Le espressioni degli sforzi viscosi sono

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (16)$$

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = 2\mu\Omega \quad (17)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = -2\mu\Omega \quad (18)$$

Per ricavare  $\mathcal{P}(x, y)$  semplifichiamo le equazioni di Navier-Stokes tenendo conto che: (i) se valgono le condizioni di moto potenziale, i termini viscosi possono essere trascurati rispetto a quelli inerziali ed al gradiente di pressione, (ii) le componenti di velocità si possono esprimere tramite le equazioni 13 e 14:

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} \rightarrow \rho (\Omega^2 x) = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} \quad (19)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} \rightarrow \rho (\Omega^2 y) = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} \quad (20)$$

dalle quali si ricava l'espressione della pressione  $\mathcal{P}$ :

$$d\mathcal{P} = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} dy \rightarrow d\mathcal{P} = -\rho\Omega^2(xdx + ydy) \quad (21)$$

$$\rightarrow \mathcal{P}(x, y) = -\rho \frac{\Omega^2}{2} (x^2 + y^2) + \mathcal{P}_I \quad (22)$$

e. 

---

La teoria è stata sviluppata a lezione. Si faccia riferimento al capitolo 4.5.3 (pagina 166) del libro.

Per tracciare l'andamento della funzione di flusso lungo il piano la esprimiamo come:

$$\Psi = -U_{\infty} \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}} \cdot f(\eta) = -\nu \sqrt{\frac{U_{\infty} x}{\nu}} \cdot f(\eta)$$

$$\Psi = -\nu \sqrt{Re} \cdot f(\eta).$$

Disegniamo quindi l'andamento della quantità  $\Psi/\nu$  in funzione di  $Re$  per diversi valori del numero di  $\eta$ .

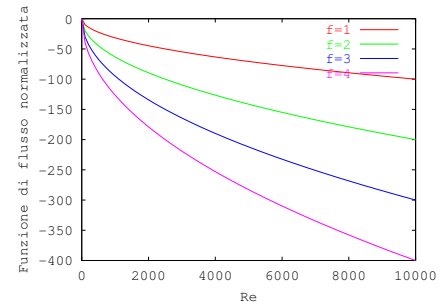


FIG. 1. Andamento della funzione di flusso  $\Psi/\nu$  lungo la piastra piana.

Analogamente, per la velocità si ha:  $v_x = U_{\infty} f'(\eta)$ . Si noti che  $v_x/U_{\infty}$  non dipende dal valore del numero di Reynolds, Disegniamo quindi l'andamento della quantità  $v_x/U_{\infty}$  in funzione di  $\eta$ : si ottiene esattamente la fig. 4.22 a pag. 169 del testo.

Per il taglio si ricava:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = \mu U_{\infty} \frac{\partial f'}{\partial y} = \mu U_{\infty} \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu x}} \cdot f''(\eta) = \\ &= \rho U_{\infty}^2 \sqrt{\frac{\nu}{U_{\infty} x}} f''(\eta) = \rho U_{\infty}^2 \frac{1}{\sqrt{Re}} f''(\eta) \end{aligned}$$

In questo caso, disegniamo la quantità  $\tau_{xy}/\rho U_{\infty}^2$  in funzione di  $Re$  per diversi valori di  $\eta$ .

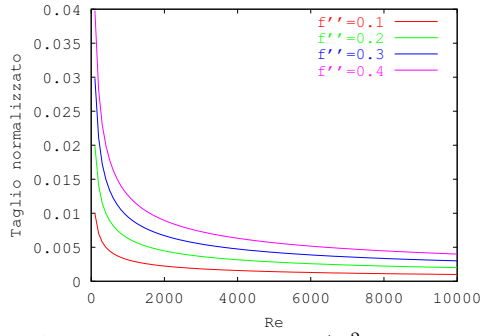


FIG. 2. Andamento del taglio  $\tau_{xy}/U_\infty^2\nu$  lungo la piastra piana.

Infine, l'andamento dello spessore dello strato limite varia a seconda della definizione:

- (a)  $\delta_{99}$ :  $v_x(\delta_{99}) = 0.99U_\infty \rightarrow f' = 0.99$  in base alla definizione di  $v_x$ . Ma  $f' = 0.99 \rightarrow \eta = 3.5$  dalla tabella. Inoltre:

$$\eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} = 3.5$$

$$\rightarrow y = \delta_{99} = 3,5\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} = 3,5\frac{\nu}{U_\infty}\sqrt{Re}$$

Disegniamo quindi l'andamento della quantità  $\delta_{99}U_\infty/\nu$  in funzione di  $Re$ .

- (b)  $\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{v_x}{U_\infty}\right) dy = \int_0^\infty (1 - f')\delta(x)d\eta$   
essendo  $\eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} = \frac{y}{\delta(x)} \rightarrow d\eta = dy/\delta(x)$ .  
Possiamo riscrivere:

$$\begin{aligned} \delta^* &= \delta(x) \int_0^\infty (1 - f')d\eta = \\ &= \delta(x) \left[ \int_0^6 (1 - f')d\eta + \int_6^\infty (1 - f')d\eta \right]. \end{aligned}$$

Dalla tabella, si deduce che il secondo integrale è praticamente nullo poiché  $f' \rightarrow 1$  per  $\eta > 6$ . Quindi, consideriamo solo il primo integrale e ricaviamo:

$$\begin{aligned} \delta^* &= \delta(x) \int_0^6 (1 - f')d\eta = \delta(x)(\eta|_0^6 - f|_0^6) = \\ &= [(6 - 0) - (4.78322 - 0)]\delta(x) = 1,21678\delta(x). \end{aligned}$$

Poiché  $\delta(x) \cdot U_\infty/\nu = \sqrt{Re}$ , disegniamo l'andamento della quantità  $\delta^*U_\infty/\nu$  in funzione di  $Re$ .

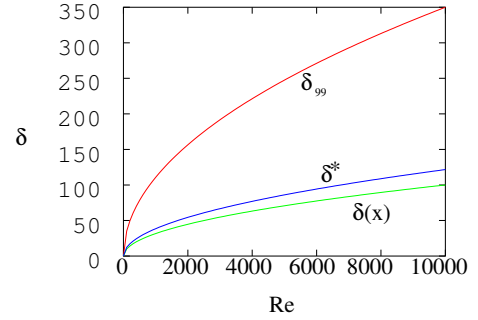


FIG. 3. Andamento degli spessori  $\delta_{99}U_\infty/\nu$  e  $\delta^*U_\infty/\nu$  in funzione di  $\eta$ .

f.

- (a) Le linee di flusso rappresentate in figura possono essere utilizzate per calcolare la portata movimentata. È infatti:

$$Q = \int d\psi = \psi_{max} - \psi_{min} \quad (23)$$

Dallo studio della funzione  $\psi(r, z)$  si vede che i valori massimo e minimo della  $\psi$  si hanno al bordo e al centro della cella,

$$\psi(r = 0.5, z = 0) = 0 \quad \text{al bordo}$$

$$\psi(r = 0.55, z = 0.05) = 4 \quad \text{al centro}$$

per cui  $Q = 4$ .

- (b) Per calcolare la differenza di pressione tra 2 punti si utilizza Bernoulli (nell'ipotesi di trascurare i termini potenziali):

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} \quad (24)$$

da cui

$$p_1 - p_2 = \rho \left( \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \right) = \rho \left( \frac{v_{max}^2 - v_{min}^2}{2} \right) \quad (25)$$

La massima differenza di pressione si avrà quindi tra i punti per cui è massima la differenza di velocità. Le componenti di velocità sono date da

$$v_r = -\frac{\partial\psi}{\partial z} = -4 \sin\left(\frac{r - R_i}{d}\pi\right) \left(\frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h}\right)$$

$$v_z = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 4 \frac{\pi}{d} \cdot \cos\left(\frac{r - R_i}{d} \pi\right) \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$$

Si può calcolare il modulo di velocità  $v^2 = v_r^2 + v_z^2 = f(r, h)$  e determinare massimo e minimo oppure considerare che:

- gli angoli e il centro della cella di Taylor sono punti a velocità nulla  $\rightarrow v_{min} = 0$ ;
- in un flusso di circolazione la portata è costante per ogni sezione di flusso e la velocità è maggiore dove la sezione è ridotta.

Da queste considerazioni si ricava che le sezioni mediane (orizzontale a  $z = h/2$  e verticale a  $r = R_i$ ) sono quelle in cui si avrà la velocità più alta. In particolare, dal profilo di velocità si vede che la velocità in queste sezioni è massima in corrispondenza del bordo, risulta che:

$$v_{max}^2 = v^2(r = R_i, z = h/2) = \frac{16\pi^2}{h^2}$$

$$v_{max}^2 = v^2(r = R_i + d/2, z = 0) = \frac{16\pi^2}{d^2}$$

con  $h^2 = d^2$  essendo  $h = d$ . La massima differenza di pressione risulta pertanto:

$$\Delta p = \frac{\rho}{2} \frac{16\pi^2}{d^2}.$$