Calcolo della pressione equivalente in casi di flussi a pelo libero

Nei problemi del moto di film o nella teoria della lubrificazione capita di dover esprimere la pressione equivalente per integrare la componente dell'equazione di Navier-Stokes e ricavare il profilo di velocità . É importante sapere esprimere nel modo corretto la pressione equivalente nel sistema di riferimento scelto.

1. **Moto a film di spessore δ di un fluido incomprimibile lungo un piano inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale**
   Preso un riferimento con origine sul piano inclinato, asse x parallelo al piano e verso il basso e asse y normale al piano, verso l'alto, le equazioni di Navier-Stokes risutano:

$$0 = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \tag{1}$$

$$0 = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} \tag{2}$$

$$0 = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} \tag{3}$$

Dalle ultime due si ricava l'indipendenza di $\mathcal{P}$ da y e z e quindi $\mathcal{P} = \mathcal{P}(x)$. Per definizione di pressione equivalente è

$$\mathcal{P}(x, y, z) = p(x, y, z) + \rho g h(x, y, z) \tag{4}$$

dove x, y, z indica un punto generico, p è la pressione e h è la posizione del punto rispetto ad un piano orizzontale di riferimento. Per un piano inclinato con il sistema di riferimento indicato, supponiamo di conoscere la posizione h_0 dell'origine del sistema degli assi. La posizione h per un punto (x, y, z) risulta

$$h(x, y, z) = h_0 - x \sin\alpha + y \cos\alpha \quad . \tag{5}$$

Poiché $\mathcal{P}$ dipende solo da x, possiamo utilizzare la 4 per ricavare l'espressione della pressione $p(x, y, z)$. Infatti, $\mathcal{P}$ deve essere lo stesso in ogni punto ad x costante, per cui si ha

$$\begin{aligned} p(x, y, z) + \rho g(h_0 - x \sin\alpha + y \cos\alpha) = \\ p(x, \delta, z) + \rho g(h_0 - x \sin\alpha + \delta \cos\alpha) \end{aligned} \tag{6}$$

ovvero la pressione equivalente nel film deve essere la stessa del punto del film che si trova alla superficie libera, dove si conosce il valore della pressione ($p(x, \delta, z) = p_{atm}$). Risulta, esplicitando $p(x, y, z)$

$$p(x, y, z) = p_{atm} + \rho g(\delta - y) \cos\alpha \tag{7}$$

cioè la distribuzione delle pressioni è idrostatica nella direzione y, normale al piano inclinato. Infatti, derivando rispetto ad y si ha

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = -\rho g \cos\alpha \tag{8}$$

che è la distribuzione idrostatica. Considerando l'espressione di$p$ e di h, la pressione equivalente risulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = p_{atm} + \rho g(\delta - y) \cos\alpha + \\ \rho g(h_0 - x \sin\alpha + y \cos\alpha) = \\ = p_{atm} + \rho g(\delta \cos\alpha + h_0 - x \sin\alpha) \end{aligned} \tag{9}$$

e derivando rispetto ad x si trova

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = -\rho g \sin\alpha \tag{10}$$

che è la variazione della pressione equivalente lungo il piano che permette di integrare la componente lungo x delle equazioni di Navier-Stokes.

2. Consideriamo lo stesso moto di film ma adottando un sistema di riferimento con origine sulla superficie libera, asse x parallelo al piano, verso il basso, asse y normale al piano ($y = \delta$ sul piano). Sia h_0 ancora l'altezza dell'origine degli assi rispetto ad un piano orizzontale di riferimento. L'altezza h di un generico punto (x, y, z) in questo caso risulta

$$h(x, y, z) = h_0 - x \sin\alpha - y \cos\alpha \tag{11}$$

L'espressione per la pressione $p(x, y, z)$ si ricava tenendo conto che anche in questo caso la pressione equivalente è costante per qualsiasi punto ad x fissato, e per il punto corrispondente alla superficie libera, ($y = 0$), è noto il valore di pressione:

$$\begin{aligned} p(x, y, z) + \rho g(h_0 - x \sin\alpha - y \cos\alpha) = \\ p(x, 0, z) + \rho g(h_0 - x \sin\alpha) \end{aligned} \tag{12}$$

Risulta, sostituendo $p(x, 0, z) = p_{atm}$ ed esplicitando $p(x, y, z)$

$$p(x, y, z) = p_{atm} + \rho g y \cos\alpha \tag{13}$$

che significa ancora che la distribuzione delle pressioni è idrostatica nella direzione y, normale al piano inclinato. Derivando rispetto ad y si ha

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = \rho g \cos\alpha \tag{14}$$

che è la distribuzione idrostatica (la pressione aumenta con l'affondamento y del punto). Considerando l'espressione di p e di h, la pressione equivalente risulta:

$$\begin{aligned}\mathcal{P} = p_{atm} + \rho g y \cos\alpha + \\ +\rho g(h_0 - x\sin\alpha - y\cos\alpha) = \\ = p_{atm} + \rho g(h_0 - x\sin\alpha)\end{aligned} \quad (15)$$

e derivando rispetto ad x si trova ancora

$$\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}x} = -\rho g \sin\alpha \quad (16)$$

3. Consideriamo il caso a pelo libero della teoria della lubrificazione in cui si ha un film di spessore variabile nella direzione del flusso. Preso un sistema di riferimento con origine sul piano, asse x orizzontale lungo il piano e asse y ortogonale ($y = \delta(x)$ individua la superficie libera), dalla semplificazione delle equazioni di Navier-Stokes si ha

$$0 = -\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (17)$$

$$0 = -\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial y} \quad (18)$$

$$0 = -\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial z} \quad (19)$$

Dalle ultime due si ricava anche in questo caso l'indipendenza di $\mathcal{P}$ da y e z e quindi $\mathcal{P} = \mathcal{P}(x) = p(x,y,z) + \rho g h(x,y,z)$. Se conosciamo la posizione h_0 dell'origine del sistema degli assi rispetto ad un piano orizzontale di riferimento, la posizione h per un punto (x,y,z) risulta

$$h(x,y,z) = h_0 + y \quad . \quad (20)$$

Poiché $\mathcal{P}$ dipende solo da x, possiamo utilizzare la 4 per ricavare l'espressione della pressione $p(x,y,z)$. Infatti, $\mathcal{P}$ deve essere lo stesso in ogni punto ad x costante, per cui si ha

$$\begin{aligned}p(x,y,z) + \rho g(h_0 + y) = \\ p(x,\delta(x),z) + \rho g(h_0 + \delta(x))\end{aligned} \quad (21)$$

ovvero la pressione equivalente nel film deve essere la stessa del punto del film che si trova alla superficie libera, dove si conosce il valore della pressione ($p(x,\delta(x),z) = p_{atm}$). Risulta, esplicitando $p(x,y,z)$

$$p(x,y,z) = p_{atm} + \rho g(\delta(x) - y) \quad (22)$$

cioè la distribuzione delle pressioni è idrostatica nella direzione y, normale al piano inclinato, e aumenta proporzionalmente all'affondamento $(\delta(x) - y)$ del punto. Derivando rispetto a y si ha

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = -\rho g \quad (23)$$

che è la distribuzione idrostatica. Considerando l'espressione di p e di h, la pressione equivalente risulta:

$$\mathcal{P} = p_{atm} + \rho g(\delta(x) - y) + \rho g(h_0 + y) = \quad (24)$$

$$= p_{atm} + \rho g(\delta(x) + h_0) \quad (25)$$

e derivando rispetto ad x si trova

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}x} = \rho g\frac{\mathrm{d}\delta(x)}{\mathrm{d}x} \quad (26)$$

che è la variazione della pressione equivalente lungo il piano che permette di integrare la componente lungo x delle equazioni di Navier-Stokes.