FLUIDODINAMICA, AA 2019/2020

I Compito II Appello - Durata 2 ore - Libri Chiusi

19 Febbraio 2020

1

Un atomizzatore è costituito da un disco di raggio R che ruota a velocità angolare ω costante sul quale viene alimentato il liquido. Per effetto centrifugo, dal disco si staccano orizzontalmente gocce di diametro iniziale D_p e velocità iniziale $v_0 = \omega R$ utilizzate per umidificazione. Si trascurino le forze di gravità e di galleggiamento e si ipotizzi moto delle gocce in regime di Stokes ($C_D = 24/\text{Re}_p$ con $\text{Re}_p = \rho \mid \mathbf{u} - \mathbf{v} \mid D_p/\mu$).

1. Calcolare quale deve essere il diametro minimo delle gocce affinchè queste riescano a coprire una distanza orizzontale L. Si consideri massa della gocce costante. [15%]
2. Supponendo che, dal momento in cui si staccano dal disco, le gocce evaporino con tasso $c = k\pi D^2$ (con $D = D(t)$ diametro della particella e k costante in kg/m^2s), determinare il diametro delle gocce quando la loro velocità risulta essere pari a $v_0/3$. [20%]

2

Un nastro trasportatore viene utilizzato per convogliare un fluido (avente viscosità μ e densità ρ) da un serbatoio A ad un serbatoio B utilizzando un nastro trasportatore (avente lunghezza L e larghezza W) che si muove con velocità costante U. Sia H il livello di liquido nel serbatoio A, misurato rispetto alla quota a cui si trova il nastro ed assunto costante. Assumendo nullo lo sforzo di taglio all'interfaccia superiore del liquido, si chiede di:

1. semplificare le equazioni di Continuità e Navier-Stokes, indicando chiaramente le ipotesi semplificative, [5%]
2. determinare il profilo di velocità del fluido, tracciandone l'andamento qualitativo, [10%]
3. Determinare la potenza necessaria per mantenere in moto il nastro. [10%]
4. Si assuma che, per effetto del riempimento, il livello di liquido nel serbatoio B risulti pari alla quota a cui si trova il nastro trasportatore e che sia possibile mantenere costante tale livello durante il trasporto. Determinare l'espressione dello spessore δ che consente di annullare la portata trasferita. [10%]

3

Il manometro in Fig. 2 è costituito da un ampolla sferica (avente volume $V = 10^{-2}\ m^3$) riempita d'aria e da una tubazione a sezione circolare di diametro costante. Nei tratti $1-2$ e $3-4$, la tubazione è riempita con mercurio mentre nel tratto $2-3$ la tubazione è riempita con acqua. Si assuma, per semplicità di calcolo, pressione atmosferica $p_{atm} = 10^5\ Pa$, densità del mercurio $\rho_{Hg} = 10^4\ kg/m^3$ e accelerazione di gravità $g = 10\ m/s$.

1. Calcolare la pressione dell'aria p_a sapendo che $p_4 = p_{atm}$ e che le differenze di quota tra le varie sezioni sono: $\Delta h_{21} = 0.2\ m$, $\Delta h_{23} = 1.0\ m$, $\Delta h_{43} = 0.4\ m$. [15%]
2. Il mercurio contenuto nel tratto $1-2$ viene prelevato tramite una tubazione di scolo. In tal modo è possibile far espandere isotermicamente l'aria "allungando" il tratto $0-1$. Sapendo che (1) la lunghezza del tratto $0-1$ è $L_{01} = 0.3\ m$ prima dell'espansione e $L_{01} = 0.35\ m$ dopo l'espansione, e che (2) la pressione dell'aria al termine dell'espansione (ovvero una volta completato il prelievo) risulta $p'_a = 1.4 \cdot 10^5\ Pa$, determinare l'area della sezione della tubazione. [15%]

Figure

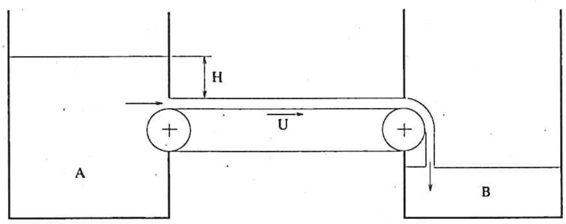


Figura 1

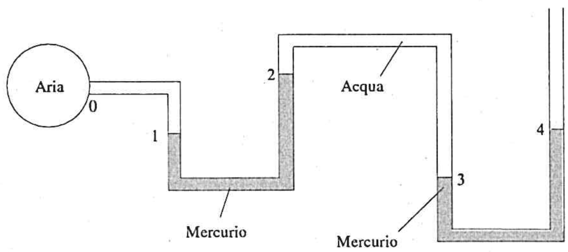


Figura 2

Continuità $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0$ *Navier-Stokes* $\rho\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}\right)$

Forza di Drag per la particella: $\mathbf{F}_D = \dfrac{1}{2} C_D \rho_f A_p (\mathbf{u} - \mathbf{v})|\mathbf{u} - \mathbf{v}|$

Eq. di Bernoulli: $\dfrac{1}{2}v^2 + gh + \dfrac{p}{\rho} = costante$

EXE 1

1.1) $$\frac{dv_{p,x}}{dt} = -\frac{v_{p,x}}{\tau_p}$$

HP:
$\vec{F}_p = \vec{F}_{gal} = \vec{0}$
$v_{p,y} = 0$

$$v_{p,x} = v_0 e^{-t/\tau_p}$$

$$X_p(t) = v_0 \tau_p \left(1 - e^{-t/\tau_p}\right)$$

$$X_{p,max} = v_0 \tau_p = L \Rightarrow \tau_p = \frac{\rho_p D_p^2}{18\mu} = \frac{L}{v_0}$$

$$\boxed{D_p = \sqrt{\frac{18\mu L}{\rho_p v_0}}}$$

[15%]

1.2) Evaporazione: $$\frac{dm_p}{dt} = -\dot{m}_{out} = -C$$

$$\frac{dm_p}{dt} = \rho_p \frac{\pi}{6} \frac{dD_p^3}{dt} = 3 D_p^2 \rho_p \frac{\pi}{6} \frac{dD_p}{dt}$$

$$\downarrow \frac{1}{2}\pi D_p^2 \cdot \rho_p \frac{dD_p}{dt}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{\pi D_p^2} \rho_p \frac{dD_p}{dt} = -K \cancel{\pi D_p^2} \Rightarrow \boxed{\frac{dD_p}{dt} = -\frac{2K}{\rho_p}}$$

$$\boxed{D_p(t) = D_{p,0} - \frac{2k}{\rho_p} \cdot t}$$

$$m_p \frac{dv_{p,x}}{dt} + v_{p,x} \frac{dm_p}{dt} = - 3\pi \mu v_{p,x} D_p$$

$$\frac{dv_{p,x}}{dt} = - \underbrace{\frac{3\pi \mu D_p}{\rho_p \frac{\pi D_p^3}{6}}}_{- \frac{18\mu}{\rho_p} \cdot \frac{1}{D_p^2}} v_{p,x} + \underbrace{\frac{k \pi D_p^2}{\rho_p \frac{\pi D_p^3}{6}}}_{- \frac{6k}{\rho_p} \cdot \frac{1}{D_p}} v_{p,x}$$

$$= - \left(\frac{18\mu}{\rho_p} \cdot \frac{1}{D_p^2} - \frac{6k}{\rho_p} \cdot \frac{1}{D_p} \right) v_{p,x}$$

$$\frac{dv_{p,x}}{v_{p,x}} = - \frac{18\mu}{\rho_p} \cdot \frac{1}{D_p^2} dt + \frac{6k}{\rho_p} \cdot \frac{1}{D_p} dt$$

$dt = - \frac{\rho_p}{2k} dD_p \rightsquigarrow$

$$= + \frac{9\mu}{k} \cdot \frac{1}{D_p^2} dD_p - 3 \cdot \frac{1}{D_p} dD_p$$

$$\int_{v_0}^{v_{p,x}(t)} \frac{dv_{p,x}}{v_{p,x}} = \frac{9\mu}{k} \int_{D_{p,0}}^{D_p(t)} \frac{1}{D_p^2} dD_p - 3 \int_{D_{p,0}}^{D_p(t)} \frac{1}{D_p} dD_p$$

$$\ln\left[\frac{v_{p,x}(t)}{v_{p,0}}\right] = \frac{g\mu}{k}\left(-\frac{1}{D_p}\right)\Bigg|_{D_{p,0}}^{D_p(t)} - 3\ln\left[\frac{D_p(t)}{D_{p,0}}\right]$$

$$= \frac{g\mu}{k}\left(\frac{1}{D_{p,0}} - \frac{1}{D_p(t)}\right) + \ln\left[\frac{D_p(t)}{D_{p,0}}\right]^{-3}$$

$$\boxed{v_{p,x} = v_{p,0}\left[\frac{D_p(t)}{D_{p,0}}\right]^{-3} \cdot e^{\frac{g\mu}{k}\left(\frac{1}{D_{p,0}} - \frac{1}{D_p(t)}\right)}}$$

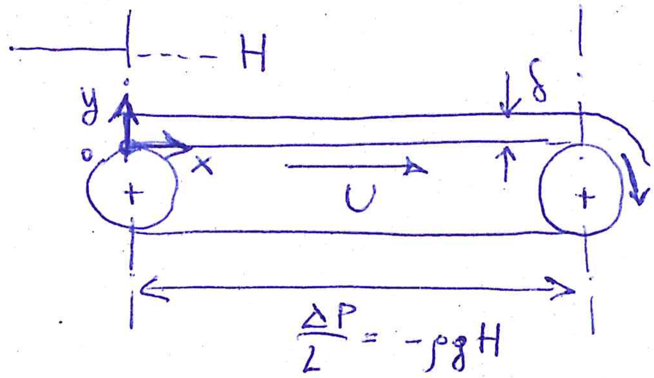
Quando $v_{p,x} = v_{p,0}/3$:

$$\left[\frac{D_p(t)}{D_{p,0}}\right]^{-3} \cdot e^{\frac{g\mu}{k}\left(\frac{1}{D_{p,0}} - \frac{1}{D_p(t)}\right)} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{D_p^{-3}(t) \cdot e^{-\frac{g\mu}{k}\cdot\frac{1}{D_p(t)}} = \frac{D_{p,0}^{-3}}{3} \cdot e^{-\frac{g\mu}{k}\cdot\frac{1}{D_{p,0}}}}$$

Il valore di $D_p(t)$ è quello che risolve questa equazione.

EXE 2



$$v_x \neq 0$$

$$v_y = v_z = 0$$

$$\frac{\partial \cdot}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \cdot}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad ; \quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad ; \quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$v_x(y) = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) y^2 + C_1 y + C_2$$

c.c. $v_x(y=0) = U$

c.c. $\tau_{yx}(y=\delta) = 0 \Rightarrow \mu \left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=\delta} = 0$

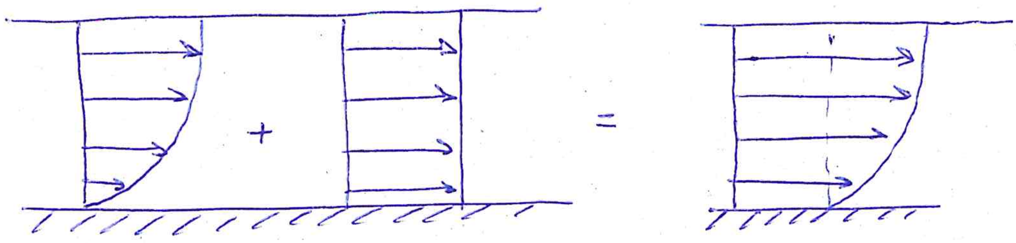
$$\mu \left[\frac{1}{\cancel{2}\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \cdot \cancel{2} y + C_1 \right]_{y=\delta} = 0$$

$$C_1 = -\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \cdot \delta$$

$$U = \left.\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) y^2 \right|_{y=0} - \left.\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \delta \cdot y \right|_{y=0} + C_2$$

$$C_2 = U$$

$$\boxed{v_x(y) = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\left(y^2 - 2\delta \cdot y\right) + U} \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho g H / L$$



$$Q = \int_0^W \int_0^\delta v_x(y)\, dy\, dz = W\left[\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\underbrace{\left(\frac{y^3}{3} - \delta^3\right)\Big|_0^\delta}_{-\frac{2}{3}\delta^3} + U\cdot\delta \right]$$

$$\boxed{\frac{Q}{W} = \frac{1}{3\mu}\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)\delta^3 + U\cdot\delta}$$

$$\tau_{yx} = \mu\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x}(y - \delta)$$

$$\tau_w = \tau_{yx}\big|_{y=0} = -\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\delta = \rho g H\cdot\delta/L$$

$$F_z = \tau_w \cdot A_{nastro} = \rho g \frac{H}{L}\cdot\delta W L$$

$$\boxed{Pot = F_z\cdot U = \rho g H \delta W\cdot U}$$

Se invertiamo il moto del nastro:

$$v_x(y) = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)(y^2 - 2\delta y) - U$$

$$\frac{Q}{W} = \frac{1}{3\mu}\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)\delta^3 - U\delta$$

$$\frac{Q}{W} = 0 \quad \text{per} \quad \delta = \left(\frac{3\mu U}{-\partial p/\partial x}\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{3\mu U}{\rho g H/L}\right)^{1/2}$$

$$\frac{\cancel{kg}}{\cancel{m\,s}} \cdot \frac{\cancel{m}}{\cancel{s}} \cdot \frac{\cancel{m^3}}{\cancel{kg}} \cdot \frac{\cancel{s^2}}{\cancel{m}} \cdot \frac{1}{\cancel{m}} \; m$$

EXE 3

3.1) Dalla statica:

$$P_4 = P_{atm}$$

$$\underline{P_3} = P_4 + \rho_{Hg}\, g\, \Delta h_{43} = 10^5 + 10^4 \cdot 10 \cdot 0{,}4$$

$$\overset{!}{=} \underline{1{,}4 \cdot 10^5 \text{ Pa}}$$

$$\underline{P_2} = P_3 - \rho_{H_2O}\, g\, \Delta h_{23}$$

$$\overset{!}{=} P_4 + \rho_{Hg}\, g\, \Delta h_{43} - \rho_{H_2O}\, g\, \Delta h_{23}$$

$$\overset{!}{=} 1{,}4 \cdot 10^5 - 10^3 \cdot 10 \cdot 1 = \underline{1.3 \cdot 10^5 \text{ Pa}}$$

$$P_1 = P_2 + \rho_{Hg}\, g\, \Delta h_{21}$$

$$\overset{!}{=} P_4 + \rho_{Hg}\, g\, [\Delta h_{21} + \Delta h_{43}] - \rho_{H_2O}\, g\, \Delta h_{23}$$

$$\overset{!}{=} 1{,}3 \cdot 10^5 + 10^4 \cdot 10 \cdot 0{,}2 = \underline{1{,}5 \cdot 10^5 \text{ Pa}}$$

$$\boxed{P_a = 1{,}5 \cdot 10^5 \text{ Pa}}$$

3.2) $P_a' = 1.4 \cdot 10^5 \; Pa$

Espansione isoterma:

$$P_a \cdot V_{in} = P_a' \cdot V_{fin}$$

con $V_{in} = V + L_{01} \cdot A_{sez}$

$V_{fin} = V + L_{01'} \cdot A_{sez}$

$$P_a \left(V + L_{01} \cdot A_{sez} \right) = P_a' \left(V + L_{01'} \cdot A_{sez} \right)$$

$$\underbrace{(P_a - P_a') \cdot V}_{\substack{(1{,}5 \cdot 10^5 - 1{,}4 \cdot 10^5) 10^{-2} \\ = 0{,}1 \cdot 10^3 = 10^2}} = A_{sez} \underbrace{\left(L_{01'} \cdot P_a' - L_{01} \cdot P_a \right)}_{\substack{0{,}35 \cdot 1{,}4 \cdot 10^5 - 0{,}3 \cdot 1{,}5 \cdot 10^5 \\ = 4 \cdot 10^{+3}}}$$

$$\underline{A_{sez}} = \frac{(P_a - P_a') \cdot V}{L_{01'} \cdot P_a' - L_{01} \cdot P_a}$$

$$= \frac{10^2}{4 \cdot 10^3} = \underline{0{,}025 \; m^2}$$