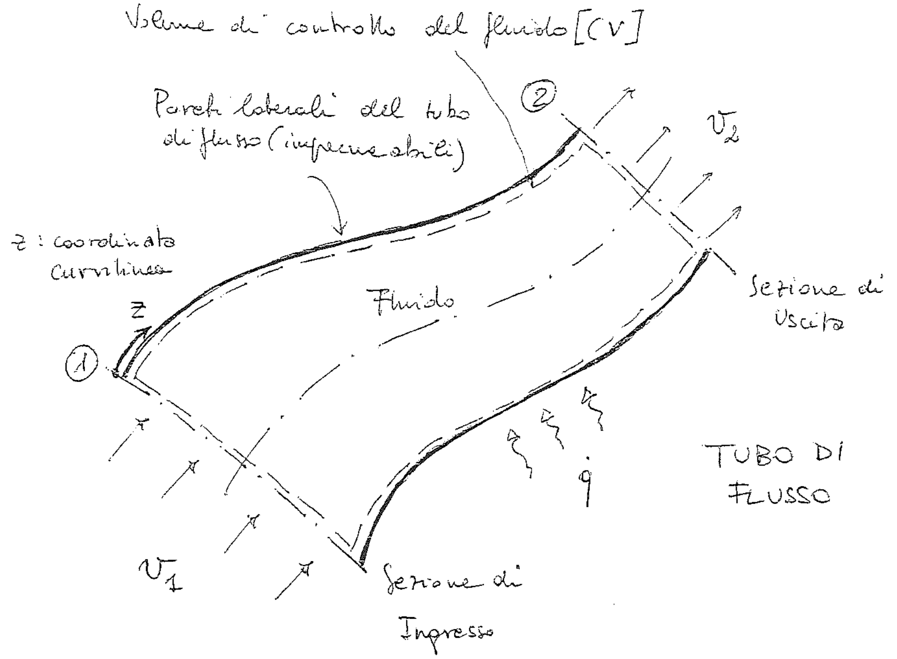
BILANCI MACROSCOPICI



A. CONSERVAZIONE DELLA MASSA (applicata al CV):

$$\underbrace{\frac{dm}{dt}}_{\text{Termine di accumulo di massa}} = \dot m_1 - \dot m_2 = \rho_1 v_1 A_1 - \rho_2 v_2 A_2 \quad \left[{}^{kg}/_{s}\right]$$

↳ Flusso di massa uscente dal CV (attraverso la sezione di uscita 2)

↳ Flusso di massa entrante nel CV (attraverso la sezione di ingresso 1)

m : massa di fluido contenuta nel CV

ρ_i : densità del fluido alla generica sez. i $(i = 1, 2)$

A_i : area della generica sez. i $(i = 1, 2)$

Per un processo stazionario : $\boxed{\frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2}$

B. CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA (applicata al CV):

L'energia totale per unità di massa di un sistema termodinamico* è pari a:

* chiuso!

$$\boxed{E_{TOT} = e + \frac{1}{2}v^2 + gh}$$

e : energia interna intrinseca del sistema (dovuto al moto molecolare all'interno del sistema)

$\frac{1}{2}v^2$: energia cinetica del sistema nel suo complesso

gh : energia potenziale del sistema (dovuta alla posizione occupata dal sistema medesimo all'interno di un campo gravitazionale)

Il principio di conservazione applicato a E_{TOT} fornisce, in forma differenziale:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left[\langle \rho(e + \tfrac{1}{2}v^2 + gh)\rangle A\right]}_{\text{Termine di accumulo dell'energia}} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial z}\left[\langle \rho(e + \tfrac{1}{2}v^2 + gh)\cdot v\rangle A\right]}_{\text{Termine convettivo (convezione di energia in direzione z)}}$$

$$\underbrace{-\frac{\partial}{\partial z}(\langle p v\rangle A)}_{\text{Termine di energia associata alle forze di pressione}} + \frac{\partial \dot q}{\partial z} + \frac{\partial W_s}{\partial z} \quad \left[{}^{J}/_{m}\right]$$

↳ Lavoro esterno netto (inserito dall'esterno tramite parete)

↳ Scambio termico tramite parete

N.B. $\langle \dots \rangle$ = indica un valore medio su tutta la sezione

Integrando l'espressione precedente lungo la coordinata curvilinea z tra le sezioni 1 e 2 si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_1^2 \langle \rho(e+\tfrac{1}{2}v^2+gh)\rangle A\,dz\right] = -\int_1^2 \frac{\partial}{\partial z}\left[\langle \rho(e+\tfrac{1}{2}v^2+gh)\cdot v\rangle A\right]$$

$$\underbrace{-\int_1^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\langle pv\rangle A\right)dz}_{\underline{\underline{\langle pv\rangle_2 A_2 - \langle pv\rangle_1 A_1}}} + \underbrace{\int_1^2 \frac{\partial \dot{q}}{\partial z}\,dz}_{\underline{\underline{\dot{q}}}} + \underbrace{\int_1^2 \frac{\partial \dot{W}_s}{\partial z}\,dz}_{\underline{\underline{\dot{W}_s}}} \qquad (1)$$

Lavoro compiuto nell'unità di tempo per far entrare ed uscire il fluido dal CV

Flusso termico scambiato con l'ambiente

Lavoro esterno netto compiuto sul fluido all'interno del CV

Ipotizzando: (1) flusso stazionario $\Rightarrow \partial\cdot/\partial t = 0$

(2) fluido incomprimibile $\Rightarrow \rho = \text{cost.}$

(3) pressione e temperatura uniformi sulla generica sezione del tubo di flusso (ma variabili da sezione a sezione...)

l'equazione (1) si riduce a:

$$\rho_1 e_1 \langle v_1\rangle A_1 - \rho_2 e_2 \langle v_2\rangle A_2 + \tfrac{1}{2}\rho_1 \langle v_1^3\rangle A_1 - \tfrac{1}{2}\rho_2 \langle v_2^3\rangle A_2 + \rho_1 g h_1 \langle v_1\rangle A_1 - \rho_2 g h_2 \langle v_2\rangle A_2 + P_1\langle v_1\rangle A_1 - P_2 \langle v_2\rangle A_2 + \dot{q} + \dot{W}_s$$

Per l'ipotesi di flusso stazionario si ha anche:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = 0 \Rightarrow \underbrace{\rho_1 \langle v_1\rangle A_1}_{\dot{m}_1 \equiv \dot{w}_1} = \underbrace{\rho_2\langle v_2\rangle A_2}_{\dot{m}_2\equiv \dot{w}_2} = \rho_i \langle v_i\rangle A_i \qquad (i = 1,2)$$

Dividendo tutto per $\rho_i \langle v_i\rangle A_i$ si ottiene:

$$(2)\quad e_1 - e_2 + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\langle v_1^3\rangle}{\langle v_1\rangle}}_{*} - \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\langle v_2^3\rangle}{\langle v_2\rangle}}_{*} + g h_1 - g h_2 + \frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2} = \frac{\dot{q}}{w} + \frac{\dot{W}_s}{w}$$

Consideriamo i termini $*$:

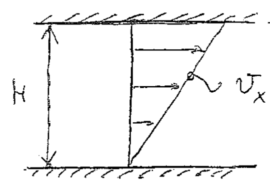
$$\frac{\langle v_1^3\rangle}{\langle v_1\rangle} = \frac{\langle v_1^3\rangle}{\langle v_1\rangle}\cdot\frac{\langle v_1\rangle^2}{\langle v_1\rangle^2} = \frac{\langle v_1^3\rangle}{\langle v_1\rangle^3}\cdot\langle v_1\rangle^2 = \alpha_1 \langle v_1\rangle^2$$

$$\frac{\langle v_2^3\rangle}{\langle v_2\rangle} = \frac{\langle v_2^3\rangle}{\langle v_2\rangle}\cdot\frac{\langle v_2\rangle^2}{\langle v_2\rangle^2} = \frac{\langle v_2^3\rangle}{\langle v_2\rangle^3}\cdot\langle v_2\rangle^2 = \alpha_2 \langle v_2\rangle^2$$

In generale, definiamo la quantità α come:

$$\alpha \triangleq \frac{\langle v^3\rangle}{\langle v\rangle^3} \quad \begin{matrix}\leftarrow \text{Media di } v^3 \\ \leftarrow \text{Cubo di } \langle v\rangle\end{matrix}$$

Esempio: flusso laminare di Couette



$v_x(y) = \frac{U}{H}y$

$$v^3 = \frac{U^3}{H^3}y^3 \rightarrow \langle v^3\rangle = \frac{1}{H}\int_0^H v^3\,dy = \frac{1}{H}\frac{U^3}{H^3}\int_0^H y^3\,dy = \frac{U^3}{H^4}\cdot\frac{H^4}{4} = \frac{U^3}{3}$$

$$\langle v\rangle = \frac{U}{2} \rightarrow \langle v\rangle^3 = \frac{U^3}{8}$$

$$\boxed{\langle v\rangle^3 = \frac{U^3}{8} \neq \langle v^3\rangle = \frac{U^3}{4}}$$

N.B. Per profilo piatto: $\langle v^3\rangle = \langle v\rangle^3 \Rightarrow \alpha = 1$!!

L'eq. (2) diventa:

$$e_2 - e_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 \langle v_2 \rangle^2 - \frac{1}{2}\alpha_1 \langle v_1 \rangle^2 + gh_2 - gh_1 + \frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{\dot{q}}{w} + \frac{w_s}{w}$$

Ponendo $\frac{\dot{q}}{w} = dq$ e $\frac{w_s}{w} = dW_s$, la conservazione dell'energia in forma differenziale (ovvero nel caso di sezioni ① e ② molto vicine):

$$(3) \quad \underbrace{de}_{\text{ENERGIA INTERNA}} + \underbrace{\frac{1}{2} d(\alpha v^2)}_{\text{ENERGIA CINETICA}} + \underbrace{g\,dh}_{\text{ENERGIA POTENZIALE}} + \underbrace{d\left(P/\rho\right)}_{\text{ENERGIA PIEZOMETRICA}} = \underbrace{dq}_{\text{ENERGIA TERMICA}} + \underbrace{dW_s}_{\text{LAVORO ESTERNO}}$$

Dalla termodinamica si ha:

$$de \triangleq TdS - p\,d(1/\rho) \qquad (4)$$

T: temperatura del sistema termodinamico

dS: entropia del sistema termodinamico

$d(1/\rho)$: variazione di volume del sistema termodinamico

$p\,d(1/\rho)$: lavoro di espansione

In base alla definizione (4), i termini di energia interna e di energia piezometrica nell'eq. (3) diventano:

$$de + d(P/\rho) = TdS - \cancel{p\,d(1/\rho)} + \cancel{p\,d(1/\rho)} + \frac{1}{\rho}dp = $$
$$\overset{!}{=} TdS - \frac{1}{\rho}dp$$

L'eq. (3) diventa: $TdS - dq + \frac{1}{2}d(\alpha v^2) + g\,dh + \frac{dp}{\rho} = dW_s$

Per il II° principio della termodinamica, si ha:

$$\boxed{dl_v = TdS - dq \geq 0} \qquad (5)$$

dl_v: Quota di energia meccanica trasformata irreversibilmente in calore (ovvero dissipata!)

$$dl_v \begin{cases} = 0 & (\Rightarrow dq = TdS) \text{ per un processo reversibile} \\ > 0 & (\Rightarrow dq = TdS - dl_v) \text{ per un processo irreversibile} \end{cases}$$

In base alla (5), la conservazione dell'energia si scrive:

$$\boxed{\frac{1}{2}d(\alpha v^2) + g\,dh + \frac{dp}{\rho} = dW_s - dl_v}$$ EQUAZIONE DI BERNOULLI

L'equazione di Bernoulli esprime la conservazione dell'energia per un sistema termodinamico stazionario: si possono avere trasformazioni di energia da cinetica a potenziale e/o piezometrica e viceversa. E' possibile fornire al sistema una certa quantità di energia dall'esterno (dW_s) a scapito di una certa perdita (dl_v) per favorire tali trasformazioni nella maniera voluta.

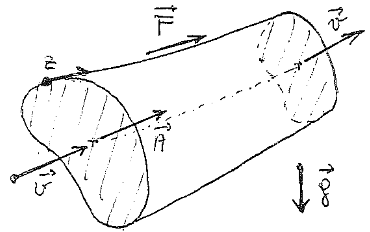
C. CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO (applicata al CV)

Consideriamo, per semplicità, un flusso unidirezionale bidimensionale attraverso un CV con sezioni di ingresso e di uscita piane e con ρ, p e T aventi valore costante su tutta la sezione.

L'eq. di conservazione della q.tà di moto in forma differenziale si può scrivere nella seguente forma:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho < \vec{v} > A\right)}_{\substack{\text{Termine di}\\ \text{accumulo di}\\ \text{q.tà di moto}}} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho < \vec{v}\cdot\vec{v} > A\right)}_{\substack{\text{Termine convettivo}\\ \text{(flusso di q.d.m.}\\ \text{in direzione } z)}} \underbrace{-\frac{\partial}{\partial z}\left(p\vec{A}\right) - \frac{\partial \vec{F}}{\partial z}}_{\substack{\text{Forze di}\\ \text{superficie}}} + \underbrace{\rho\vec{g}A}_{\substack{\text{Forze di}\\ \text{volume}}} \quad \left[\frac{N}{m}\right]$$

con $\vec{F}$: vettore della forza esercitata dal fluido sul CV che lo contiene.



Integrando lungo la coordinata curvilinea tra le sezioni ① e ② si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{z_1}^{z_2} \rho < \vec{v} > A\, dz = -\rho_2 < \vec{v}\cdot\vec{v} >_2 A_2 + \rho_1 < \vec{v}\cdot\vec{v} >_1 A_1 - p_2\vec{A}_2 + p_1\vec{A}_1$$
$$- \vec{F} + \int_{z_1}^{z_2} \rho\vec{g} A\, dz$$

Dall'ipotesi di sezioni piane, deriva che il vettore velocità $\vec{v}$ è normale a tali sezioni.

Nell'ipotesi di flusso stazionario:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad \left(\rightarrow \frac{\partial m}{\partial t} = 0 \text{ ovvero } \rho_1 < v_1 > A_1 = \rho_2 < v_2 > A_2 \right)$$

Si ottiene:

$$\vec{0} = \rho_1 < \vec{v}\cdot\vec{v} >_1 A_1 - \rho_2 < \vec{v}\cdot\vec{v} >_2 A_2 + p_1\vec{A}_1 - p_2\vec{A}_2 - \vec{F} + \int_{z_1}^{z_2} \rho A\, dz \cdot \vec{g}$$

$$\vec{0} = \rho_1 < \vec{v}\cdot\vec{v} >_1 A_1 \cdot \frac{< v_1 >}{< v_1 >} - \rho_2 < \vec{v}\; v >_2 A_2 \cdot \frac{< v_2 >}{< v_2 >} +$$
$$+ p_1\vec{A}_1 - p_2\vec{A}_2 - \vec{F} + \int_{z_1}^{z_2} \rho A\, dz \cdot \vec{g} \qquad (*)$$

Considerando solo i primi due termini a destra nell'eq. (*):

$$\rho_1 < \vec{v}\cdot\vec{v} >_1 A_1 \cdot \frac{< v_1 >}{< v_1 >} = \underbrace{\rho_1 < v_1 > A_1}_{\dot{m}_1 \equiv w_1} \cdot \frac{< \vec{v}\cdot\vec{v} >_1}{< v_1 >}$$

$$\rho_2 < \vec{v}\, v >_2 A_2 \cdot \frac{< v_2 >}{< v_2 >} = \underbrace{\rho_2 < v_2 > A_2}_{\dot{m}_2 \equiv w_2} \cdot \frac{< \vec{v}\cdot\vec{v} >_2}{< v_2 >}$$

A stazionario: $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$ o, in notazione alternativa: $w_1 = w_2$

Inoltre: $\dfrac{< \vec{v}\cdot\vec{v} >_1}{< v_1 >} = \dfrac{< v^2 >_1}{< v_1 >} = \dfrac{< v^2 >_1}{< v_1 >} \cdot \dfrac{< v_1 >}{< v_1 >} = \dfrac{< v^2 >_1}{< v_1 >^2} \cdot < v_1 >$

Ponendo, analogamente a quanto fatto con α: $\beta \triangleq \dfrac{< v^2 >}{< v >^2}$ si ottiene:

$$\boxed{\vec{0} = \dot{m}\left[\beta_1 < \vec{v}_1 > - \beta_2 < \vec{v}_2 >\right] + p_1\vec{A}_1 - p_2\vec{A}_2 - \vec{F} + \left(\int_{z_1}^{z_2} \rho A\, dz\right)\cdot\vec{g}}$$