ADIMENSIONALIZZAZIONE DELLE EQ. DI CONTINUITÀ E DI NAVIER-STOKES (x TEORIA DELLA LUBRIFICAZIONE)

Variabili adimensionali:

$$\tilde{v}_x = \frac{v_x}{U} \qquad \tilde{x} = \frac{x}{L}$$

$$\hat{v}_y = \frac{v_y}{V} \qquad \hat{y} = \frac{y}{H_1} \qquad + \qquad \hat{p} = \frac{p}{\pi}$$

V = vel. caratteristica in direz. y } da determinare!
Π = pressione caratteristica

EQ. DI CONTINUITÀ (IN 2D): $\dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} = 0$

→ Adimensionalizzazione: $\dfrac{U}{L}\dfrac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}} + \dfrac{V}{H_1}\dfrac{\partial \hat{v}_y}{\partial \hat{y}} = 0$

$$\frac{U}{L}\cdot\frac{H_1}{V}\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{y}} = 0$$

L'unico caso possibile è $\dfrac{U}{L}\cdot\dfrac{H_1}{V} \sim O(1) \Rightarrow \boxed{V \cong U\cdot\dfrac{H_1}{L}}$

Infatti, se fosse:
1. $\dfrac{U}{L}\cdot\dfrac{H_1}{V} \gg 1$ allora trascureremmo $\dfrac{\partial \hat{v}_y}{\partial \hat{y}}$ e l'eq. di continuità si ridurrebbe a $\dfrac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}} = 0$ (FLUSSO COMPLETAMENTE SVILUPPATO) ovvero ad una condizione impossibile
2. $\dfrac{U}{L}\cdot\dfrac{H_1}{V} \ll 1$ allora trascureremmo $\dfrac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}}$ e l'eq. di continuità si ridurrebbe a

$\frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{y}} = 0$. Cio' implicherebbe $\tilde{v}_y = \text{COST.}$ lungo y. Essendo $\tilde{v}_y = 0$ alle pareti, dovrebbe essere COST = 0 ovvero $\tilde{v}_y$ nulla in tutto il campo di moto, che e' di nuovo una condizione impossibile.

L'eq. di continuità per la teoria della lubrificazione e':

$$\boxed{\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0}$$

EQ. DI NAVIER-STOKES (PER MOTO STAZIONARIO 2D):

$$\rho\left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) \quad \boxed{NS_x}$$

→ Adimensionalizzazione:

$$\rho\left(\frac{U^2}{L}\tilde{v}_x \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}} + \underbrace{\frac{UV}{H_1}}\tilde{v}_y \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}}\right) = -\frac{\Pi}{L}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \mu\left(\frac{U}{L^2}\frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{U}{H_1^2}\frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}^2}\right)$$

$$\frac{UV}{H_1} = \frac{U}{\cancel{H_1}}\left(U\frac{\cancel{H_1}}{L}\right) = \frac{U^2}{L}$$

$$\rho\frac{U^2}{L}\left(\tilde{v}_x \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_y \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}}\right) = -\frac{\Pi}{L}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\mu U}{H_1^2}\left(\frac{H_1^2}{L^2}\frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}^2}\right)$$

Divido tutto per $\mu U/H_1^2$:

$$\underbrace{\frac{\rho U^2}{L}\cdot\frac{H_1^2}{\mu U}}_{Re\cdot(H_1/L)}\cdot\left(\tilde{v}_x \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_y \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}}\right) = -\frac{\Pi}{L}\cdot\frac{H_1^2}{\mu U}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}^2}\frac{H_1^2}{L^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}^2}\right)$$

Se: $Re \cdot \frac{H_1}{L} \ll 1$ allora i termini convettivi sono trascurabili rispetto al grad. di pressione ed ai termini viscosi.

Perché $\frac{H_1}{L} \ll 1$ allora $\frac{H_1^2}{L^2} \ll 1$ e $\frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}^2}$ è trascurabile rispetto a $\frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}^2}$. L'eq. di NS_x si approssima come:

$$0 \cong -\frac{\Pi}{L} \cdot \frac{H_1^2}{\mu U} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}^2} \qquad NS_x$$

L'unica possibilità è $\frac{\Pi}{L} \cdot \frac{H_1^2}{\mu U} \sim O(1) \Rightarrow \boxed{\Pi \cong \frac{\mu U L}{H_1^2}}$

Infatti, se fosse: $\frac{\Pi}{L} \cdot \frac{H_1^2}{\mu U} \gg 1$ la NS_x diventerebbe $0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}}$

$\frac{\Pi}{L} \cdot \frac{H_1^2}{\mu U} \ll 1$ " " " $0 = \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}^2}$

entrambi i casi conducono a incongruenze!

L'eq. di NS_x per la teoria della lubrificazione è:

$$\boxed{0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}}$$

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \quad \boxed{NS_y}$$

$\longrightarrow$ Adimensionalizzazione:

$$\rho \left(\frac{UV}{L} \tilde{v}_x \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{x}} + \frac{V^2}{H_1} \tilde{v}_y \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{y}} \right) = -\frac{\Pi}{H_1} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \mu \left(\frac{V}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_y}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{V}{H_1^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_y}{\partial \tilde{y}^2} \right)$$

Elaborando i vari coefficienti:

$$\frac{V^2}{H_1} = \frac{U^2 H_1^2}{L^2}\cdot\frac{1}{H_1} = \frac{U^2}{L^2}\cdot H_1$$

$$\frac{UV}{L} = \frac{U}{L}\cdot\frac{UH_1}{L} = \frac{U^2}{L^2}H_1$$

$$\Rightarrow \rho\frac{U^2}{L^2}H_1\left(\tilde{v}_x\frac{\partial\tilde{v}_y}{\partial\tilde{x}} + \tilde{v}_y\frac{\partial\tilde{v}_y}{\partial\tilde{y}}\right)$$

$$\frac{V}{L^2} = \frac{UH_1}{L}\cdot\frac{1}{L^2} = \frac{UH_1}{L^3}$$

$$\frac{V}{H_1^2} = \frac{UH_1}{L}\cdot\frac{1}{H_1^2} = \frac{U}{LH_1}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu U}{LH_1}\left(\underbrace{\frac{H_1^2}{L^2}}_{<<1}\overbrace{\cancel{\frac{\partial^2\tilde{v}_y}{\partial\tilde{x}^2}}}^{\text{trascurabile}} + \frac{\partial^2\tilde{v}_y}{\partial\tilde{y}^2}\right)$$

Dividendo tutto per $\mu U / LH_1$:

$$\underbrace{\rho\frac{U^{\cancel{2}}}{L^2}H_1\cdot\frac{LH_1}{\mu\cancel{U}}}_{\underbrace{\rho\frac{UH_1}{\mu}\cdot\frac{H_1}{L}}_{Re\cdot\frac{H_1}{L}<<1}}\overbrace{\cancel{\left(\tilde{v}_x\frac{\partial\tilde{v}_y}{\partial\tilde{x}} + \tilde{v}_y\frac{\partial\tilde{v}_y}{\partial\tilde{y}}\right)}}^{\text{trascurabili}} = -\underbrace{\frac{\Pi}{\cancel{H_1}}\cdot\frac{L\cancel{H_1}}{\mu U}}_{\underbrace{\frac{\Pi L}{\mu U}}}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{y}} + \frac{\partial^2\tilde{v}_y}{\partial\tilde{y}^2}$$

$$\frac{\cancel{\mu U}L}{H_1^2}\cdot\frac{L}{\cancel{\mu U}} = \frac{L^2}{H_1^2} >> 1$$

Avremo: $$0 = -\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{y}}\cdot\underbrace{\frac{L^2}{H_1^2}}_{>>1} + \overbrace{\cancel{\frac{\partial^2\tilde{v}_y}{\partial\tilde{y}^2}}}^{\text{trasc.}}$$

L'eq. di NS_y per la teoria della lubrificazione è:

$$\boxed{0 = -\frac{\partial p}{\partial y}}$$