METODI APPROSSIMATI

Lo studio dei moti di tipo unidirezionale utilizza le eq. di conservazione (Continuità e Navier-Stokes) in forma completa e sfrutta semplificazioni possibili in base al particolare flusso che si sta risolvendo.

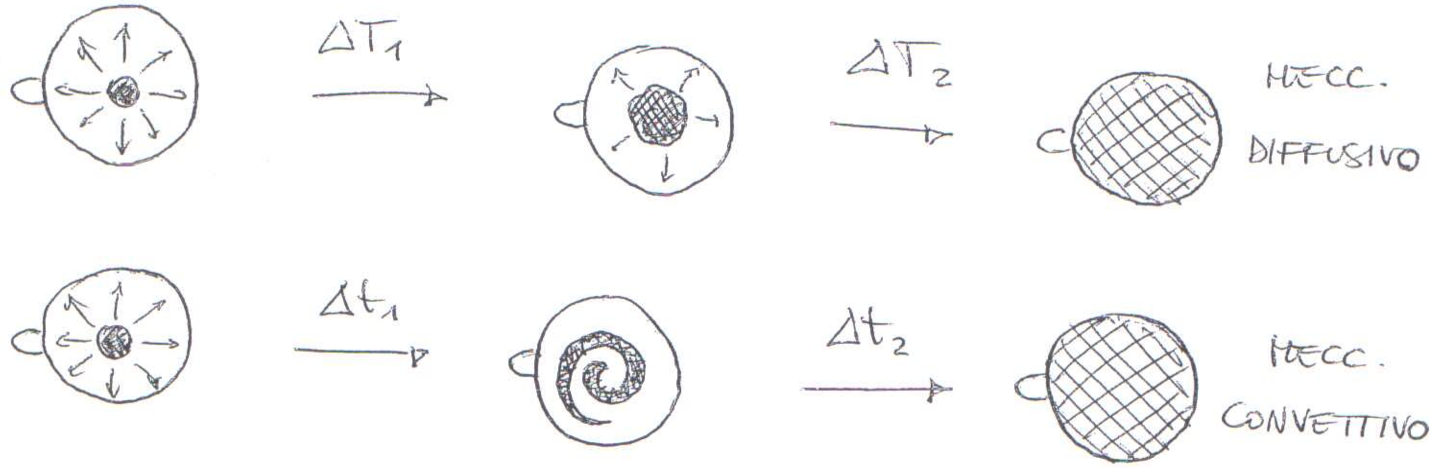
In molti altri casi di interesse pratico, la soluzione delle eq. di conservazione, e di NS in particolare, può essere ricavata utilizzandone una forma approssimata, ovvero una forma in cui alcuni termini possono essere trascurati in quanto caratterizzati da ordini di grandezza molto piccoli rispetto ad altri termini che compaiono nelle eq.

I Metodi Approssimati si basano essenzialmente sulla possibilità di valutare gli ordini di grandezza dei singoli termini che compaiono nelle eq. di conservazione, andando a trascurare quei termini che determinano in maniera non significativa la struttura del campo di moto.

Un tipico esempio di confronto tra ordini di grandezza è quello relativo ai termini convettivi e viscosi nelle eq. di NS:

$$\rho\left[\underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial t}}_{\text{ACCUMULO DI QDM}} + \underbrace{v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}}_{\text{CONVEZIONE DI QDM}}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \underbrace{\mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}}_{\text{DIFFUSIONE DI QDM}}$$

I termini convettivi $v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ rappresentano, dal punto di vista fisico, un meccanismo convettivo di trasporto della q.tà di moto di un fluido. I termini viscosi $\mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}$ invece rappresentano un meccanismo diffusivo di trasporto



I due meccanismi di trasporto della q.tà di moto sono caratterizzati da tempi scala molto diversi: $\Delta T_i \gg \Delta t$. In altri termini, la q.tà di moto si trasferisce in tempi più brevi quando il meccanismo convettivo predomina su quello diffusivo, ovvero quando:

$$\rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \gg \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \Rightarrow \text{INERZIA DOMINANTE}$$

La q.tà di moto si trasferisce in tempi più lunghi quando il meccanismo diffusivo predomina su quello conv. ovvero quando:

$$\rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \ll \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \Rightarrow \text{FORZE VISCOSE DOMINANTI}$$

In conclusione, quando uno dei due termini è predominante l'altro può essere trascurato perché di ordine di grandezza molto inferiore

ADIMENSIONALIZZAZIONE DELLE EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES E DI CONTINUITÀ

Consideriamo le seguenti quantità adimensionali:

$$\tilde{v}_x = \frac{v_x}{V}, \quad \tilde{v}_y = \frac{v_y}{V}, \quad \tilde{v}_z = \frac{v_z}{V}$$

$$\tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{L}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{L} \qquad + \quad \tilde{P} = \frac{P}{\Pi}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{T}$$

EQ. DI CONTINUITÀ DIMENSIONALE: $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

ADIMENSIONALIZZAZIONE:

$$\frac{\partial(\tilde{v}_x \cdot V)}{\partial(\tilde{x} \cdot L)} + \frac{\partial(\tilde{v}_y \cdot V)}{\partial(\tilde{y} \cdot L)} + \frac{\partial(\tilde{v}_z \cdot V)}{\partial(\tilde{z} \cdot L)} = 0$$

$$\frac{V}{L}\left(\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}} = 0$$

EQ. DI NAVIER-STOKES DIMENSIONALE (NS_x per semplicità)

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)$$

ADIMENSIONALIZZAZIONE:

$$\rho\left[\frac{\partial(\tilde{v}_x \cdot V)}{\partial(\tilde{t} \cdot T)} + \tilde{v}_x V \frac{\partial(\tilde{v}_x \cdot V)}{\partial(\tilde{x} \cdot L)} + \tilde{v}_y V \frac{\partial(\tilde{v}_x \cdot V)}{\partial(\tilde{y} \cdot L)} + \tilde{v}_z \cdot V \frac{\partial(\tilde{v}_x \cdot V)}{\partial(\tilde{z} \cdot L)}\right] = -\frac{\partial(\tilde{P} \cdot \Pi)}{\partial(\tilde{x} \cdot L)} +$$

$$+\mu\left[\frac{\partial^2(\tilde{v}_x \cdot V)}{\partial(\tilde{x} \cdot L)^2} + \frac{\partial^2(\tilde{v}_x \cdot V)}{\partial(\tilde{y} \cdot L)^2} + \frac{\partial^2(\tilde{v}_x \cdot V)}{\partial(\tilde{z} \cdot L)}\right]$$

$$\frac{\rho V}{T} \cdot \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{t}} + \frac{\rho V^2}{L}\left(\tilde{v}_x \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_y \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}} + \tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{z}}\right) = -\frac{\Pi}{L}\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\mu V}{L^2}\left(\frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{z}^2}\right)$$

Dividiamo tutto per $\frac{\mu V}{L^2}$:

$$\frac{\rho L^2}{\mu T}\cdot\frac{\partial\tilde{v}_x}{\partial\tilde{t}}+\underbrace{\frac{\rho V L}{\mu}}_{Re}\left(\tilde{v}_x\frac{\partial\tilde{v}_x}{\partial\tilde{x}}+\tilde{v}_y\frac{\partial\tilde{v}_x}{\partial\tilde{y}}+\tilde{v}_z\frac{\partial\tilde{v}_x}{\partial\tilde{z}}\right)=-\frac{\pi L}{\mu V}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{x}}+\left(\frac{\partial^2\tilde{v}_x}{\partial\tilde{x}^2}+\frac{\partial^2\tilde{v}_x}{\partial\tilde{y}^2}+\frac{\partial^2\tilde{v}_x}{\partial\tilde{z}^2}\right)$$

Ora: $\frac{\rho L^2}{\mu T}=\frac{\rho L V}{\mu}\cdot\frac{L}{VT}=Re\cdot\frac{1}{Sr}$ con $\boxed{Sr=\frac{VT}{L}}$ NUMERO DI STROUHAL (freq. adimensionale)

Quindi:

$$\boxed{Re\left(\frac{1}{Sr}\cdot\frac{\partial\tilde{v}_x}{\partial\tilde{t}}+\tilde{v}_x\frac{\partial\tilde{v}_x}{\partial\tilde{x}}+\tilde{v}_y\frac{\partial\tilde{v}_x}{\partial\tilde{y}}+\tilde{v}_z\frac{\partial\tilde{v}_x}{\partial\tilde{z}}\right)=-\frac{\pi L}{\mu V}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{x}}+\left(\frac{\partial^2\tilde{v}_x}{\partial\tilde{x}^2}+\frac{\partial^2\tilde{v}_x}{\partial\tilde{y}^2}+\frac{\partial^2\tilde{v}_x}{\partial\tilde{z}^2}\right)}$$

Il valore di π viene definito a seconda che il moto sia dominato dalle forze di inerzia o da quelle viscose:

CASO A: INERZIA DOMINANTE ($Re \gg 1$)

$$\pi \triangleq \rho V^2 \Rightarrow \frac{\pi L}{\mu V}=\frac{\rho V^2 L}{\mu V}=\frac{\rho V L}{\mu}=Re$$

l'eq. di NS in forma adimensionale diventa:

$$Re\left(\frac{1}{Sr}\frac{\partial\tilde{v}_x}{\partial\tilde{t}}+\tilde{v}_x\frac{\partial\tilde{v}_x}{\partial\tilde{x}}+\tilde{v}_y\frac{\partial\tilde{v}_x}{\partial\tilde{y}}+\tilde{v}_z\frac{\partial\tilde{v}_x}{\partial\tilde{z}}+\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{x}}\right)=\frac{\partial^2\tilde{v}_x}{\partial\tilde{x}^2}+\frac{\partial^2\tilde{v}_x}{\partial\tilde{y}^2}+\frac{\partial^2\tilde{v}_x}{\partial\tilde{z}^2}$$

Poiché $Re \gg 1$, i termini di sinistra hanno ordine di grandezza molto maggiore di quelli a destra (che infatti sono i termini viscosi) che possono essere trascurati. Nel caso di forze di inerzia dominanti, pertanto, l'eq. di NS può essere scritta ed utilizzata nella seguente forma:

$$\frac{1}{Sr}\frac{\partial\tilde{v}_x}{\partial\tilde{t}}+\tilde{v}_x\frac{\partial\tilde{v}_x}{\partial\tilde{x}}+\tilde{v}_y\frac{\partial\tilde{v}_x}{\partial\tilde{y}}+\tilde{v}_z\frac{\partial\tilde{v}_x}{\partial\tilde{z}}+\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{x}}=0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}=-\vec{\nabla}p}$$

CASO B: FORZE VISCOSE DOMINANTI ($Re \ll 1$)

$$\pi \triangleq \frac{\mu V}{L} \Rightarrow \frac{\pi L}{\mu V}=\frac{\mu V}{L}\cdot\frac{L}{\mu V}=1$$

L'equazione di NS in forma adimensionale diventa:

$$Re\left(\frac{1}{St}\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{t}}+\tilde{v}_x\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}}+\tilde{v}_y\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}}+\tilde{v}_z\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{z}}\right)=-\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}}+\frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}^2}+\frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}^2}+\frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{z}^2}$$

Poiché $Re \ll 1$, i termini a sinistra hanno ordine di grandezza molto minore di quelli a destra e possono pertanto essere trascurati, soprattutto nel caso limite di $Re \to 0$ (CREEPING FLOW o MOTO DI PURO SCORRIMENTO). Nel caso di forze viscose dominanti, l'eq. di NS può essere scritta ed utilizzata nella seguente forma semplificata:

$$0=-\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}}+\frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}^2}+\frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}^2}+\frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{z}^2} \Rightarrow \boxed{0=-\vec{\nabla}p+\mu\nabla^2\vec{v}}$$

Nel caso di moto di puro scorrimento useremo:

$$0=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) \qquad NS_x$$

$$0=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right) \qquad NS_y$$

$$0=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) \qquad NS_z$$