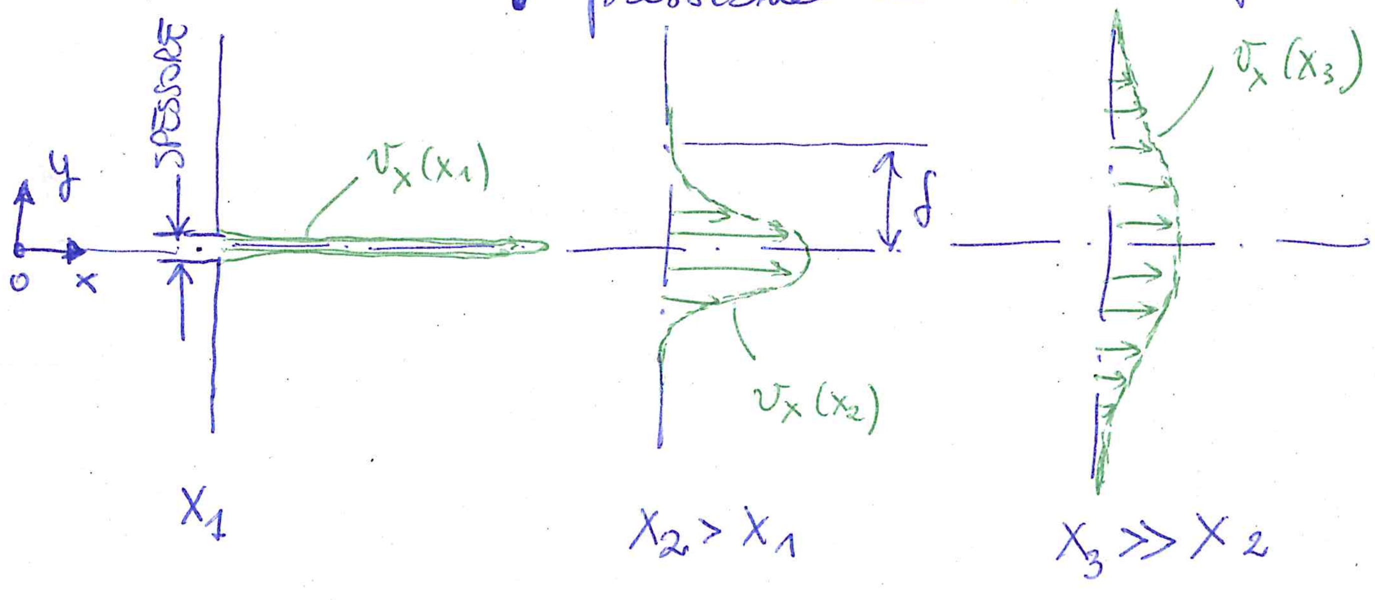
GETTO PIANO

Si vuole studiare il caso di un getto di fluido che viene immesso in un fluido che ha uguali proprietà fisiche (ovvero, stessa densità e stessa viscosità) e che si trova in quiete.

IPOTESI :
- getto bidimensionale laminare
- getto prodotto attraverso un orifizio (= fessura lunga e sottile)
- pressione costante e uniforme



In corrispondenza dell'origine del getto ($x = x_1$), ipotizziamo spessore dell'orifizio infinitesimo, ovvero velocità del getto tendente ad infinito (in modo da poter avere un valore finito di portata uscente e anche di q.tà di moto uscente).

Equazioni di conservazione:

- $\dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} = 0$
- $v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$

con $v_y(y=0)$ in quanto il getto si espande in maniera simmetrica rispetto all'asse $y=0$ (ma evolve in entrambe le direzioni per $y \neq 0$).

Condizioni al contorno:

- $\dfrac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \quad @ \quad y = 0$ (SIMMETRIA GETTO)
- $v_x \to 0 \quad @ \quad y \to \pm\infty$ (FLUIDO FERMO LONTANO DAL GETTO)

Sfruttiamo anche in questo caso l'ipotesi di similarità dei profili di velocità:

$$\begin{cases} v_x(x,y) = U(x) \cdot \phi(\eta) \\ \eta = y / \delta(x) \end{cases}$$

con $U(x)$ = massima velocità del getto ad una certa distanza x dall'origine del getto stesso

Possiamo determinare la relazione che deve esistere tra $U(x)$ e $\delta(x)$, per i quali non abbiamo ancora derivato una espressione. Tale relazione deriva dalla considerazione che il flusso di q.tà di moto per unità di larghezza dell'orifizio:

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\underbrace{\rho v_x(x,y)}_{\text{q.d.m. per unità di volume}} \cdot v_x(x,y)]\, dy$$

debba in realtà rimanere costante lungo x in assenza di un gradiente di pressione lungo x:

$$M(x) = M(x = x_1) \equiv \underbrace{M_0}_{\text{COSTANTE}}$$

Risulta quindi:

$$d\eta = \frac{1}{\delta(x)}\, dy$$

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho\, v_x^2(x,y)\, dy$$

$\frac{v_x}{U(x)} = \phi(\eta) \rightarrow$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \rho\, U^2(x) \cdot \phi^2(\eta) \cdot \delta(x)\, d\eta}_{\text{NON DEVE DIPENDERE DALLA COORD. } x\,!} \equiv M_0$$

sse $\boxed{U^2(x) \cdot \delta(x) = \text{COST.}}$ (1)

Dalla continuità: $\dfrac{\partial v_y}{\partial y} = -\dfrac{\partial v_x}{\partial x}$

$\longrightarrow$

$$dv_y = -\frac{\partial}{\partial x}\left[U(x)\cdot\phi(\eta)\right]dy$$

$$= \left[-U(x)\underbrace{\frac{\partial\phi(\eta)}{\partial x}} - \phi(\eta)\frac{dU(x)}{dx}\right]\delta(x)\,d\eta$$

$$\frac{\partial\phi(\eta)}{\partial x} = \frac{d\phi(\eta)}{d\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x} = \phi'(\eta)\cdot\left(-\frac{y}{\delta^2(x)}\cdot\frac{d\delta}{dx}\right)$$

$$= +U(x)\cdot\phi'(\eta)\cdot\frac{y}{\delta^2(x)}\cdot\frac{d\delta}{dx}\cdot\cancel{\delta(x)}\,d\eta +$$

$$-\phi(\eta)\frac{dU(x)}{dx}\cdot\delta(x)\,d\eta$$

Integrando:

dipendono solo da x!

$$\int_{v_y(x,y=0)\equiv 0}^{v_y(x,y)} dv_y = \int_0^{\eta} U(x)\cdot\phi'(\eta)\cdot\eta\,\frac{d\delta}{dx}\,d\eta +$$

$$-\int_0^{\eta}\phi(\eta)\frac{dU(x)}{dx}\delta(x)\,d\eta$$

ovvero :

$$v_y(x,y) = U(x)\frac{d\delta}{dx}\int_0^\eta \phi'(\eta)\,\eta\,d\eta \;+$$

$$-\;\frac{dU(x)}{dx}\,\delta(x)\int_0^\eta \phi(\eta)\,d\eta$$

Dalla (1) :

$$U^2(x)\cdot\delta(x) = \text{cost} \implies \frac{d\left[U^2(x)\cdot\delta(x)\right]}{dx} = 0$$

$$\implies 2U(x)\,\frac{dU(x)}{dx}\cdot\delta(x) + U^2(x)\,\frac{d\delta(x)}{dx} = 0$$

$$\implies \boxed{\frac{dU(x)}{dx}\cdot\delta(x) = -\frac{1}{2}\,U(x)\,\frac{d\delta(x)}{dx}}$$

Risulta pertanto :

$$v_y(x,y) = -\,2\frac{dU(x)}{dx}\,\delta(x)\int_0^\eta \phi'(\eta)\,\eta\,d\eta$$

$$-\;\frac{dU}{dx}\,\delta(x)\int_0^\eta \phi(\eta)\,d\eta$$

$\longrightarrow$

$$v_y(x,y) = -\frac{dU(x)}{dx}\cdot\delta(x)\left[2\int_0^\eta \phi'(\eta)\,\eta\,d\eta + \int_0^\eta \phi(\eta)\,d\eta\right]$$

Ponendo : $f(\eta) \triangleq \int_0^\eta \phi(\eta)\,d\eta$ [I°]

risulta : $f'(\eta) \triangleq \dfrac{df}{d\eta} = \phi(\eta)$ [II°]

Inoltre :

RISOLVO PER PARTI

$$\int_0^\eta \phi'(\eta)\,\eta\,d\eta \triangleq \eta\,\phi(\eta) - \int_0^\eta \phi(\eta)\,d\eta \quad [\text{III°}]$$

Sostituendo [I°], [II°] e [III°] nell'espressione di $v_y(x,y)$ si ottiene:

$$v_y(x,y) = -\frac{dU(x)}{dx}\cdot\delta(x)\left[2\eta\phi - 2\overbrace{\int_0^\eta \phi\,d\eta}^{\equiv f\,!!} + \int_0^\eta \phi\,d\eta\right]$$

$\phi \equiv f'$!!

→

$$\boxed{v_y(x,y)} = -\frac{dU(x)}{dx}\cdot\delta(x)\left(2\eta\cdot f' - f\right)$$

$$= \boxed{\frac{dU(x)}{dx}\cdot\delta(x)\left(f - 2\eta\cdot f'\right)}$$

Dalla [II°] deriva : $v_x(x,y) = U(x)\cdot f'(\eta)$

$$= -\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

ovvero : $d\psi = -\, v_x(x,y)\, dy$

Integrando :

$$\boxed{\psi} = -\int_0^y v_x(x,y)\, dy$$

$$= -\int_0^\eta U(x)\cdot f'(\eta)\cdot\delta(x)\, d\eta$$

$$= -\, U(x)\,\delta(x)\int_0^\eta f'(\eta)\, d\eta$$

$$= \boxed{-\, U(x)\cdot\delta(x)\cdot f(\eta)}$$

Questa espressione fornisce quella trovata per v_y (essendo $v_y \triangleq \partial\psi/\partial x$).

Avendo ora le espressioni per v_x, v_y e ψ possiamo andare a riscrivere la NS:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$(U \cdot f') \cdot \frac{\partial (U \cdot f')}{\partial x} + \left[\frac{dU}{dx} \delta (f - 2\eta f')\right] \cdot \frac{\partial (U \cdot f')}{\partial y} =$$

$$= \nu \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial (U \cdot f')}{\partial y}\right]$$

$$(U \cdot f') \cdot \left(U f'' \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + f' \frac{dU}{dx}\right) +$$

$$+ \left[\frac{dU}{dx} \delta (f - 2\eta f')\right] \cdot U \cdot f'' \frac{\partial \eta}{\partial y} =$$

$$= \nu \frac{\partial}{\partial y}\left(U \cdot f'' \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)$$

con $\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\delta(x)}$

$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{y}{\delta^2} \frac{d\delta}{dx}$

$\longrightarrow$

$$U^2 \cdot f' \cdot f''\left(-\frac{y}{\delta^2}\frac{d\delta}{dX}\right) + U\frac{dU}{dX}\cdot(f')^2 +$$

$$+ U\frac{dU}{dX}\cancel{\delta}(f - 2\eta f')\cdot f''\cdot\frac{1}{\cancel{\delta}} =$$

$$= \nu\,\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U}{\delta}f''\right)}_{\frac{U}{\delta}f'''\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{U}{\delta^2}f'''}$$

Semplificando tutto per $\frac{\nu U}{\delta^2}$, che è il coeff. davanti a f''', si ottiene:

$$-U^{\cancel{2}}\frac{y}{\cancel{\delta^2}}\frac{d\delta}{dX}\cdot\frac{\cancel{\delta^2}}{\nu\cancel{U}}\cdot f'\cdot f'' + \cancel{U}\frac{dU}{dX}\cdot\frac{\delta^2}{\nu\cancel{U}}\cdot(f')^2 +$$

$$+ \cancel{U}\frac{dU}{dX}\cdot\frac{\delta^2}{\nu\cancel{U}}\cdot(f\cdot f'' - 2\eta f'\cdot f'') = f'''$$

$$-U\cdot\frac{\eta\delta}{\nu}\frac{d\delta}{dX}\cdot f'\cdot f'' + \frac{dU}{dX}\cdot\frac{\delta^2}{\nu}\cdot(f')^2 +$$

$$+ \frac{dU}{dX}\cdot\frac{\delta^2}{\nu}\cdot f\cdot f'' - 2\frac{dU}{dX}\cdot\frac{\delta^2}{\nu}\cdot\eta\cdot f'\cdot f'' = f'''$$

Ricordando che (vedi pag. 6):

$$U(x)\,\frac{d\delta}{dx} = -2\,\frac{dU}{dx}\cdot\delta(x)$$

Si può riscrivere:

$$\cancel{+2\,\frac{dU}{dx}\,\frac{\delta^2}{\nu}\,\eta\, f' f''} + \frac{dU}{dx}\cdot\frac{\delta^2}{\nu}(f')^2 +$$

$$+\frac{dU}{dx}\cdot\frac{\delta^2}{\nu} f f'' \cancel{-2\,\frac{dU}{dx}\cdot\frac{\delta^2}{\nu}\cdot\eta\, f' f''} = f'''$$

ovvero:

$$\boxed{f''' - \frac{dU}{dx}\cdot\frac{\delta^2}{\nu}\left[(f')^2 + f\cdot f''\right] = 0}$$

Affinché tale equazione dipenda solo da η

deve risultare:

$$-\frac{dU}{dx}\cdot\frac{\delta^2}{\nu} = \text{COSTANTE (ARBITRARIA!)}$$

Scegliendo COSTANTE = 2 si trova:

$$\boxed{f''' + 2\left[(f')^2 + f\cdot f''\right] = 0} \quad A$$

che è l'equazione riportata nel Cap. 4 dell'Andreussi - Soldati.

Scegliendo COSTANTE = 1 si trova:

$$\boxed{f''' + f \cdot f'' + (f')^2 = 0} \quad (B)$$

che è l'equazione riportata in altri testi (ad es. Schlichting, Boundary Layer Theory).

Le condizioni al contorno sono:

$$v_y(y=0) = 0 \longrightarrow \boxed{f(\eta = 0) = 0}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y}(y=0) = 0 \longrightarrow \boxed{f''(\eta=0)=0}$$

$$v_x(y \to \infty) = 0 \longrightarrow \boxed{f'(\eta \to \infty) = 0}$$

L'equazione (A) è facilmente integrabile. Basta applicare l'integrazione per parti dall' ultimo termine :

NB. Ci sarebbe una costante di integraz. ma è 0!

$$\int_0^\eta f''' d\eta + 2\int_0^\eta (f')^2 d\eta + 2\underbrace{\int_0^\eta f f'' d\eta}_{} = 0$$

$$\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$$

$$u = f \rightarrow du = f'\, d\eta$$

$$dv = f''\, d\eta \rightarrow v = f'$$

$$\int_0^\eta f \cdot f''\, d\eta = f \cdot f' - \int_0^\eta f' \cdot f'\, d\eta$$

$$= f \cdot f' \Big|_0^\eta - \int_0^\eta (f')^2 d\eta$$

$$\underbrace{\int_0^\eta f''' d\eta}_{} + \cancel{2\int_0^\eta (f')^2 d\eta} + \underbrace{2 f \cdot f' \Big|_0^\eta}_{} - \cancel{2\int_0^\eta (f')^2 d\eta} = 0$$

$$f''\Big|_0^\eta = f''(\eta) - \cancel{f''(0)}^{=0} \qquad f \cdot f'\Big|_\eta - \cancel{f \cdot f'\Big|_0}^{=0}$$

Rimane:

$$\boxed{f''(\eta) + 2 f(\eta) \cdot f'(\eta) = 0}$$

Anche quest'ultima equazione è integrabile:

$$\underbrace{\int_0^\eta f'' d\eta}_{f'\big|_0^\eta = f'(\eta) - f'(0)} + 2\underbrace{\int_0^\eta f \cdot f' d\eta} = \text{COST.}$$

$$\int_0^\eta f \cdot f' d\eta = \int_0^\eta f \frac{df}{\cancel{d\eta}} \cancel{d\eta} = \frac{f^2}{2}\Big|_0^\eta = \frac{f^2(\eta) - \cancel{f^2(0)}^{\,0}}{2}$$

$$f'(\eta) + \cancel{2} \cdot \frac{f^2(\eta)}{\cancel{2}} = \underbrace{f'(0) + \text{COST.}}$$

NB Poiché COST. ha valore arbitrario, assumiamo $f'(0) + \text{COST.} = 1$ senza perdere in generalità

Si ottiene:

$$\boxed{f'(\eta) + f^2(\eta) = 1}$$

Questa equazione è una equazione differenziale cosiddetta di Riccati. Tale tipo di equazione è quadratica nella funzione incognita (che è f, per noi) ed ha la seguente forma generale:

$$f' = P + Q \cdot f + R \cdot (f)^2$$

con P, Q, R funzioni note. Nel nostro caso: $P = 1$; $Q = 0$; $R = -1$.

L'equazione di Riccati è risolvibile e, per il caso in esame, ha soluzione:

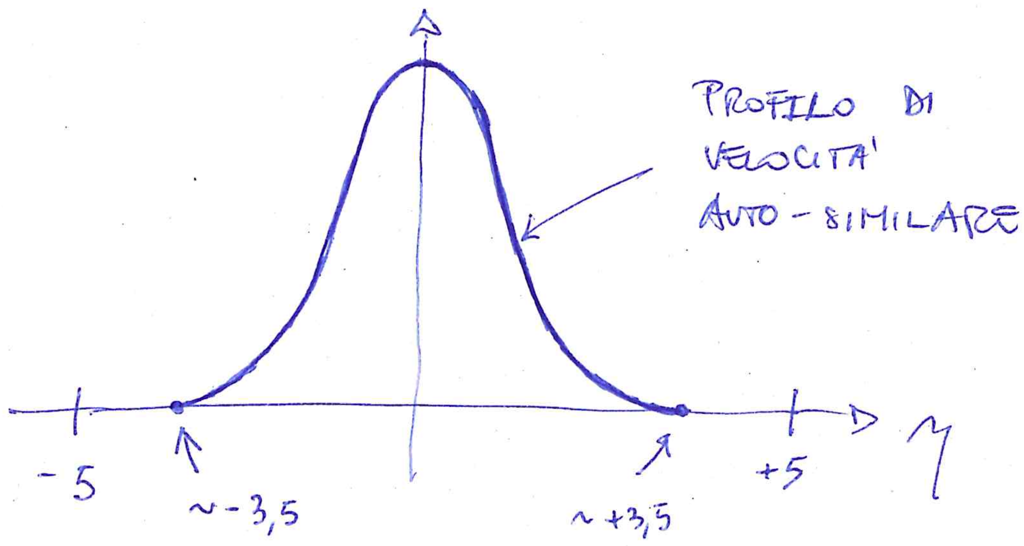
$$\boxed{f(\eta) = \tanh(\eta)}$$

Inoltre: $f'(\eta) = 1 - \tanh^2(\eta)$

e pertanto:

$$v_x(x,y) = U(x) \cdot \left[1 - \tanh^2(\eta)\right]$$

Dobbiamo ancora trovare l'espressione per $U(x)$ e $\delta(x)$, ma possiamo già fare il grafico di v_x/U:



Determiniamo ora le espressioni per $U(x)$ e per $\delta(x)$. Assumiamo le seguenti espressioni generali:

$\longrightarrow$

$$U(x) = \alpha \cdot x^{p}$$ (deve essere $U \propto x$)

$$\delta(x) = \beta \cdot x^{q}$$ (deve essere $\delta \propto x$)

La condizione $U^2_{(x)} \cdot \delta(x) = \text{cost.}$ (vedi pag. 4)

impone: $2p + q = 0 \Rightarrow \boxed{p = -q/2}$

La condizione $-\frac{dU}{dx} \cdot \frac{\delta^2}{\rho} = \text{cost.}$ (vedi pag. 11)

impone: $p - 1 + 2q = 0 \Rightarrow \boxed{q = 2/3}$

$$\downarrow$$

$$\boxed{p = -1/3}$$

ovvero:

$$U(x) = \alpha \cdot x^{-1/3} \quad ; \quad \delta(x) = \beta \cdot x^{2/3}$$

Sostituendo nella $-\frac{dU}{dx} \cdot \frac{\delta^2}{\rho} = \text{cost} \equiv 2$ si ha:

$$-\frac{d}{dx}\left(\alpha \cdot x^{-1/3}\right) \cdot \frac{\beta^2 x^{4/3}}{\rho} = 2$$

$\longrightarrow$

$$-\alpha\left(-\frac{1}{3}\cancel{x^{-4/3}}\right)\cdot\beta^2\cancel{x^{4/3}} = 2\nu$$

$$\boxed{\alpha\beta^2 = 6\nu} \Rightarrow \alpha = \frac{6\nu}{\beta^2}$$

L'ultima condizione che possiamo sfruttare è quella legata al flusso di q.tà di moto. Abbiamo infatti visto che deve risultare:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho\, U^2_{(x)}\cdot\phi^2_{(\eta)}\cdot\delta(x)\,d\eta = M_0$$

(vedi pag. 4), ovvero:

$$M_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho\left(\frac{6\nu}{\beta^2}x^{-1/3}\right)^2\cdot\left(1-\tanh^2(\eta)\right)^2\cdot\beta x^{2/3}\,d\eta$$

$$= \rho\,\frac{36\nu^2}{\beta^4}\cancel{x^{-2/3}}\cdot\beta\cancel{x^{2/3}}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\left[1-\tanh^2(\eta)\right]d\eta}_{=4/3 \text{ (senza dimostrazione)}}$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{36\rho\nu^2}{\beta^3}\cdot\frac{4}{3}$$

Abbiamo quindi trovato:

$$\boxed{\beta = \left(\frac{48 \rho \nu^2}{M_0} \right)^{1/3}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\alpha = \left(\frac{3 M_0^2}{32 \rho^2 \nu} \right)^{1/3}}$$

$$\boxed{U(x) = \left(\frac{3 M_0^2}{32 \rho^2 \nu} \right)^{1/3} \cdot x^{-1/3}} \qquad \boxed{\delta(x) = \left(\frac{48 \rho \nu^2}{M_0} \right)^{1/3} \cdot x^{2/3}}$$

$$v_x(x,y) = U(x) \cdot \left[1 - \tanh^2(\eta) \right] \qquad \eta = y/\delta(x)$$

TUTTO NOTO! TUTTO NOTO!

$$\boxed{Q = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x(x,y)\,dy = \ldots = \left(\frac{36 M_0 \cdot \nu}{\rho} \right)^{1/3} \cdot x^{1/3}}$$

PORTATA DEL GETTO 2D

N.B. $Q \uparrow$ SE $x \uparrow$!!