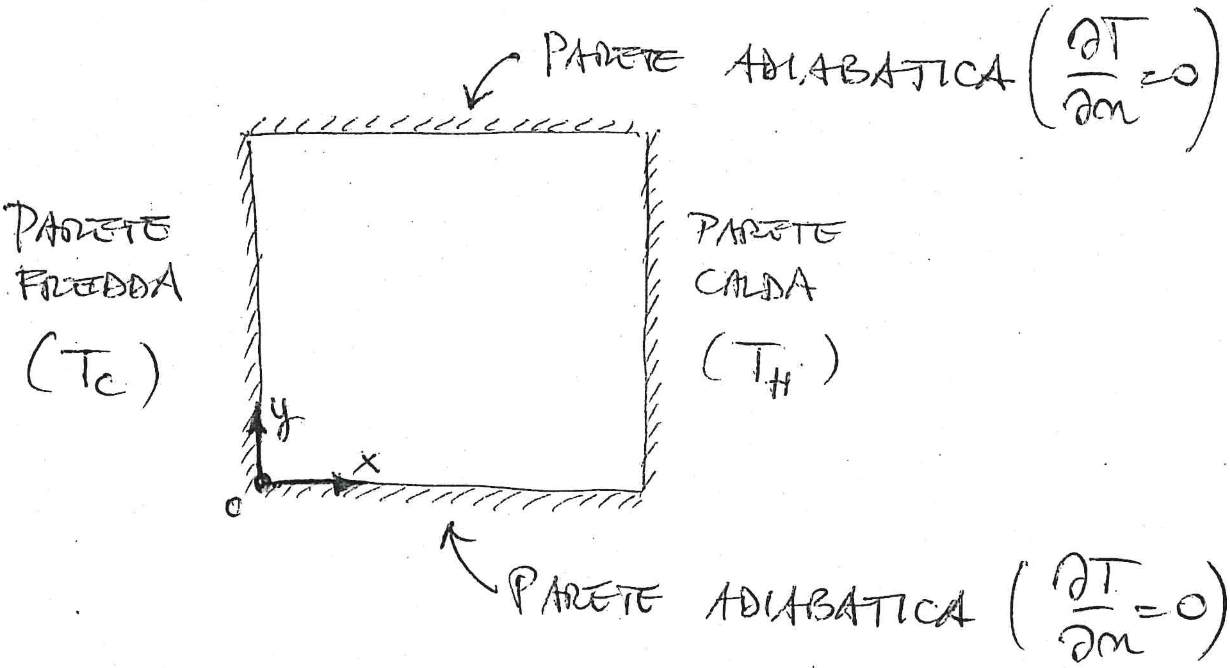
ESERCITAZIONE:

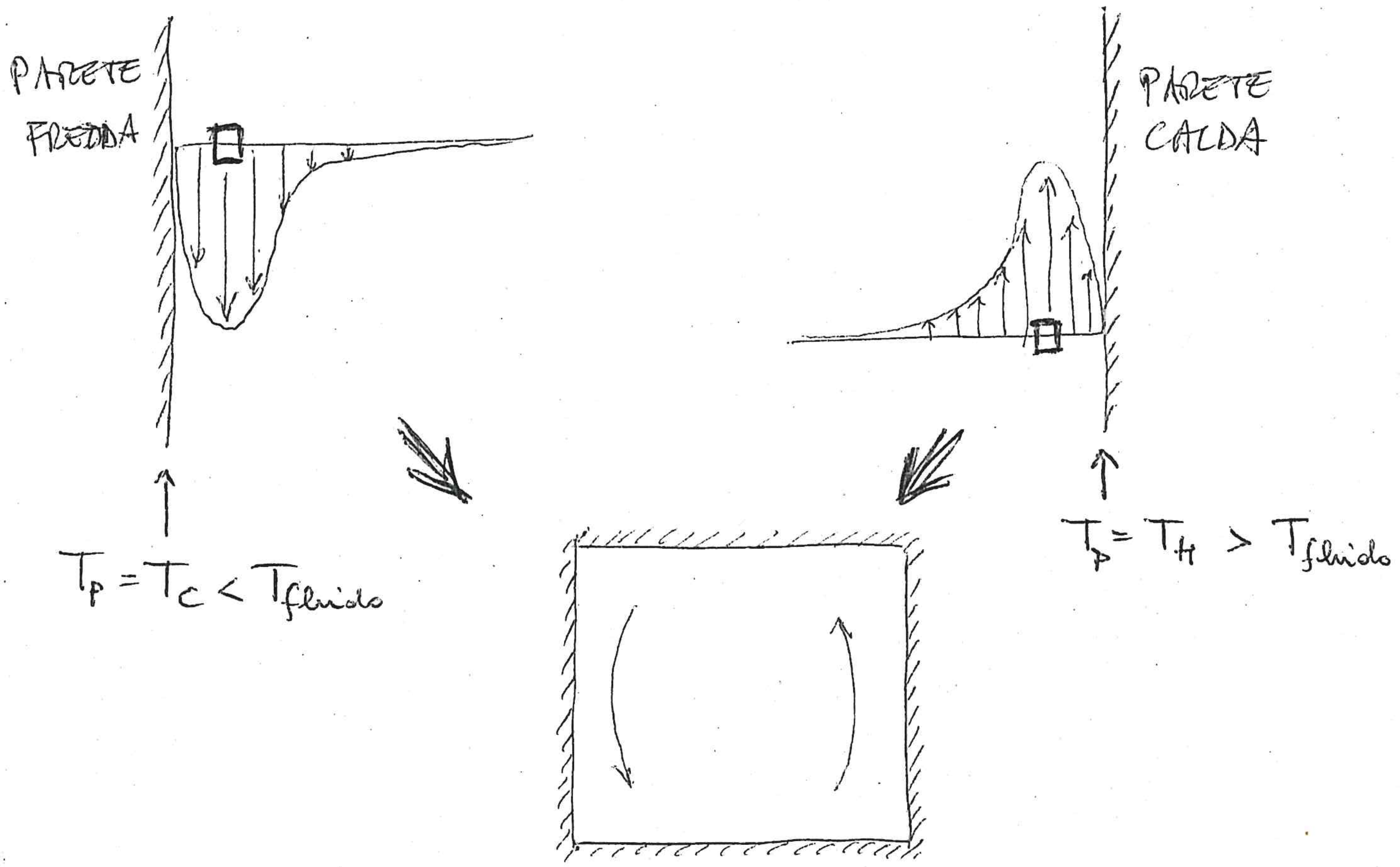
BUOYANCY-DRIVEN CAVITY FLOW

Obiettivo dell'esercitazione è risolvere per via numerica il flusso di un fluido all'interno di una cavità soggetta a variazioni di temperatura:



A causa della differenza di temperatura, alla parete calda il fluido risulta più leggero (la densità si riduce all'aumentare della temperatura) e tende a salire. In prossimità della parete fredda il fluido risulta più pesante (la densità aumenta al ridursi della temperatura) e tende a scendere. Questo effetto di galleggiamento tende a generare una ricircolazione (antioraria in questo caso) di fluido nella in assenza di pareti mobili:

Se $T_p \neq T_{fluido} \Rightarrow$ instabilità



Questo problema trova applicazione in tutti i processi dominati da fenomeni di <u>convezione naturale</u>, quindi ad esempio processi di raffreddamento dell'aria di componenti elettronici o processi di scambio termico.

- **EQUAZIONI DEL PROBLEMA:**

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \overbrace{(\rho - \rho_0) g_i}^{\text{Termine di galleggiamento}}$$

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial X_j} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial X_j^2}$$ EQ. DELL' ENERGIA

3

SPECIFIC HEAT

THERMAL CONDUCTIVITY

$\boxed{\text{CALORE SPECIFICO}}$ $\left[\frac{J}{kg\,K}\right]$

(qtà di calore per variare di 1 °C la temp. di una massa di 1 kg)

$\boxed{\text{CONDUCIBILITÀ TERMICA}}$ $\left[\frac{W}{m\,K}\right]$

$$\lambda = \frac{q}{\nabla T} = \frac{\text{flusso termico}}{\text{grad. temp.}}$$

Queste equazioni vanno riscritte in forma adimensionale, ma prima vanno scritte in una forma più "utile" alla integrazione numerica. In particolare, possiamo riscrivere il termine di galleggiamento nella N-S sfruttando la cosiddetta **IPOTESI DI OBERBECK - BOUSSINESQ** per flussi buoyancy-driven. Questa ipotesi dice che differenze di densità in flussi caratterizzati da fenomeni di <u>convezione naturale</u> sono sempre trascurabili tranne quando tali differenze di **densità** appaiono, nelle equazioni, moltiplicate all'accelerazione di gravità. Quindi il termine $(\rho - \rho_0)\, g_i$ non è trascurabile anche se $\rho - \rho_0$ è piccolo.

4

Possiamo sfruttare questa ipotesi per riscrivere il termine di galleggiamento a partire dalla definizione del COEFFICIENTE DI DILATAZIONE TERMICO VOLUMETRICO :

VOLUMETRIC THERMAL EXPANSION COEFFICIENT

$$\beta \triangleq -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_{p=cost}$$

$$\cong -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\rho-\rho_0}{T-T_0}$$

$$\Downarrow$$

$$\rho-\rho_0 \cong \rho\beta(T-T_0)$$

$$\Downarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x_i}-g_i\beta(T-T_0)+\nu\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \\ \dfrac{\partial T}{\partial t}+u_j\dfrac{\partial T}{\partial x_j}=\boxed{\dfrac{\lambda}{\rho c_p}}\dfrac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\frac{\partial \omega}{\partial t}+u_x\frac{\partial \omega}{\partial x}+u_y\frac{\partial \omega}{\partial y}=\nu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right)-g\beta\frac{\partial(T-T_0)}{\partial y}}$$

EQ. TRASPORTO DI $\vec{\omega}$ IN 2D

DIFFUSIVITÀ TERMICA [m^2/s]
THERMAL DIFFUSIVITY

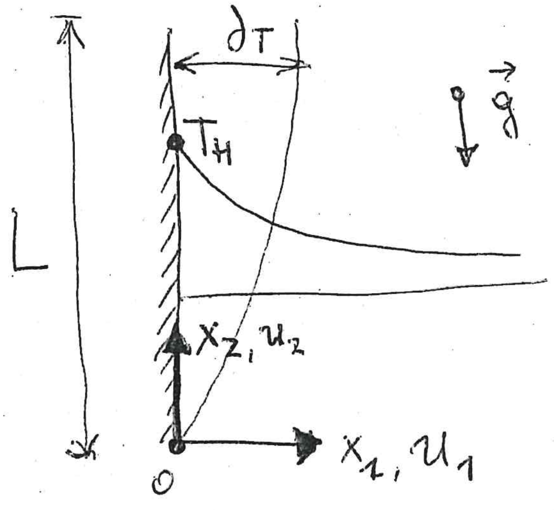
La diffusività termica dice qual'è il rapporto tra la tendenza che un certo materiale ha di trasmettere il calore (......) e la tendenza che quel materiale ha di accumulare calore (denom.)

VAI A PAG. 12

- **ADIMENSIONALIZZAZIONE DELLE EQUAZIONI:**

Il problema principale in questo caso è che non abbiamo una velocità caratteristica che è ovvio scegliere per adimensionalizzare i termini che contengono la velocità del fluido.
Vediamo come è possibile ricavare una espressione per tale velocità.

Consideriamo uno strato limite termico:



EQ. CONTINUITÀ

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{u_1}{\delta_T} \simeq \frac{u_2}{L}$$

TERMINE CONVETTIVO

$$u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \simeq u_1 \frac{\Delta T}{\delta_T} + u_2 \frac{\Delta T}{L}$$

$$u_2 \simeq u_1 \frac{L}{\delta_T}$$

$$\simeq u_1 \frac{\Delta T}{\delta_T} + u_1 \frac{\Delta T}{\delta_T} \simeq u$$

$L \gg \delta_T$!!

TERMINE DIFFUSIVO

$$\frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} \simeq \frac{\lambda}{\rho c_p}\left(\frac{\Delta T}{\delta_T^2} + \cancel{\frac{\Delta T}{L^2}}^{\text{trasc.}}\right) \simeq \underbrace{\frac{\lambda}{\rho c_p}}_{\alpha} \cdot \frac{\Delta T}{\delta_T^2}$$

Se termine convettivo e termine diffusivo nell'eq. dell'energia sono paragonabili (in termini di ordine di grandezza) allora:

$$u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \simeq \underbrace{u_1 \frac{\Delta T}{\delta_T}} \simeq \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} \simeq \underbrace{\alpha \frac{\Delta T}{\delta_T^2}}$$

$$\boxed{u_1 \simeq \frac{\alpha}{\delta_T}}$$

VEL. CARATTE RISTICA IN X_1

$$u_2 \simeq u_1 \frac{L}{\delta_T} \rightarrow u_1 \simeq \underbrace{u_2 \frac{\delta_T}{L} \simeq \frac{\alpha}{\delta_T}}$$

$$\boxed{u_2 \simeq \alpha \frac{L}{\delta_T^2}}$$

VEL. CARATT RISTICA IN

Guardiamo adesso i termini in NS_y:

HO GRAVITA' SOLO LUNGO y!

TERMINE CONVETTIVO:

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \simeq u_2 \cdot \frac{u_1}{\delta_T} + u_2 \frac{u_2}{L}$$

$$\simeq \alpha \frac{L}{\delta_T^2} \cdot \frac{\alpha}{\delta_T} \cdot \frac{1}{\delta_T} + \alpha^2 \frac{L^2}{\delta_T^4} \cdot \frac{1}{L} \simeq \alpha^2 \frac{L}{\delta_T^4}$$

ovvero $u_j \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} \simeq \alpha^2 \dfrac{L}{\delta_T^4}$

TERMINE DIFFUSIVO:

$$\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \simeq \nu\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right) \simeq \nu\left(\frac{u_2}{\delta_T^2} + \frac{u_2}{L^2}\right)$$

$$\simeq \nu \alpha \frac{L}{\delta_T^4}\Bigl(1 + \underbrace{\cancel{\frac{\delta_T^2}{L^2}}}_{\text{trasc}}\Bigr) \simeq \nu \alpha \frac{L}{\delta_T^4}$$

ovvero $\nu \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \simeq \nu \alpha \dfrac{L}{\delta_T^4}$

Il rapporto tra termine convettivo e diffusivo è pertanto:

$$\frac{u_j \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}}{\nu \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}} \simeq \frac{\alpha^{\cancel{2}} \cancel{\dfrac{L}{\delta_T^4}}}{\nu \cancel{\alpha} \cancel{\dfrac{L}{\delta_T^4}}} = \frac{\alpha}{\nu} = \frac{1}{Pr}$$

dove $\boxed{Pr = \dfrac{\nu}{\alpha}}$ = <u>NUMERO DI PRANDTL</u>

$= \dfrac{\text{diffusività q.d.m. (}\propto\text{ spessore s.lim. ve}}{\text{diffusività termica (}\propto\text{ spessore s.lim. t}}$

Quindi i due termini sono comparabili se $Pr \simeq 1$

TERMINE GALLEGGIAMENTO

$$g\beta(T-T_0) = g\beta\Delta T \quad \left[\frac{m^2}{s}\right]$$

$$\left[\frac{m^2}{s}\cdot\frac{1}{\cancel{K}}\cdot\cancel{K}\right]$$

Il rapporto tra termine di galleggiamento e termine convettivo è:

$$\frac{g\beta\Delta T}{\alpha^2\frac{L}{\delta_T^4}} = \frac{g\beta\Delta T\,\delta_T^4}{\alpha^2 L} =$$

$\frac{\alpha}{\nu} = \frac{1}{Pr}$

$$= \frac{g\beta\Delta T\,\delta_T^4}{\alpha\cdot\nu\cdot L}\,Pr$$

MOLTIPLICO E DIVIDO PER L^4

$$= \frac{g\beta\Delta T\,L^4\,\delta_T^4}{\alpha\cdot\nu\cdot L^4\cdot L}\,Pr$$

$$= \frac{g\beta\Delta T\,L^3}{\alpha\cdot\nu}\cdot Pr\cdot\frac{\delta_T^4}{L^4}$$

$$= Ra\cdot Pr\cdot\frac{\delta_T^4}{L^4}$$

Con $\boxed{Ra = \frac{g\beta\Delta T\,L^3}{\alpha\cdot\nu}}$ = **NUMERO DI RAYLEIGH**

Il numero di Rayleigh rappresenta il rapporto tra le forze di galleggiamento e le forze di attrito viscoso.

Il rapporto tra termine di galleggiamento e termine diffusivo è:

$$\frac{g\beta\Delta T}{\nu\alpha \frac{L}{\delta_T^4}} = \frac{g\beta\Delta T\,\delta_T^4}{\nu\alpha L}\cdot\frac{L^4}{L^4}$$

MOLTIPLICO E DIVIDO PER L^4 →

$$= \frac{g\beta\Delta T L^3}{\nu\alpha}\cdot\frac{\delta_T^4}{L^4}$$

$\frac{\alpha}{\nu} = \frac{1}{Pr} \rightsquigarrow \alpha = \frac{\nu}{Pr}$ →

$$= \frac{g\beta\Delta T L^3}{\nu^2}\cdot Pr\cdot\frac{\delta_T^4}{L^4}$$

$$= Gr\cdot Pr\cdot\frac{\delta_T^4}{L^4}$$

con $\boxed{Gr = \frac{g\beta\Delta T L^3}{\nu^2}}$ = NUMERO DI GRASHOF

$= \frac{\text{forze di galleggiamento}}{\text{forze viscose}}$

Abbiamo quindi evidenziato tre gruppi adimensionali che sono importanti per il nostro problema:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad ; \quad Ra = \frac{g\beta\Delta T L^3}{\alpha \cdot \nu} = Pr \cdot Gr \quad ; \quad Gr = \frac{g\beta\Delta T L^3}{\nu^2}$$

Abbiamo inoltre ricavato:

$$\circledast \quad \frac{g\beta\Delta T}{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \simeq Ra \cdot Pr \cdot \frac{\delta_T^4}{L^4} \simeq O(1) \Rightarrow \boxed{\frac{\delta_T}{L} \simeq \left(\frac{1}{Ra \cdot Pr}\right)^{1/4}}$$

vale se i termini sono fra loro confrontabili

$$\circledast \quad \frac{g\beta\Delta T}{\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}} \simeq Gr \cdot Pr \cdot \frac{\delta_T^4}{L^4} \simeq O(1) \Rightarrow \boxed{\frac{\delta_T}{L} \simeq \left(\frac{1}{Gr \cdot Pr}\right)^{1/4}}$$

Nell'ipotesi che anche $u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ e $\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$ siano confrontabili, ovvero che $Pr \simeq O(1)$, vale anche:

$$\frac{\delta_T}{L} \sim \frac{1}{Ra^{1/4}} \Rightarrow \boxed{\delta_T \sim L / Ra^{1/4}}$$

ovvero:

$$\boxed{u_2 \simeq \alpha \frac{L}{\delta_T^2} \simeq \alpha \frac{L}{\left(\frac{L^2}{\sqrt{Ra}}\right)} \simeq \alpha \frac{\sqrt{Ra}}{L}}$$

se $Pr \sim O(1)$

Si può verificare facilmente che:

$Pr \gg 1 \implies \delta_T \sim L / Ra^{1/4}$ (inerzia trascurabile

$Pr \ll 1 \implies \delta_T \sim L / (Ra \cdot Pr)^{1/4}$ (viscosità trascurab.

ma sono casi limite che non ci interessano.

Utilizzando $u_2 \simeq \alpha \frac{\sqrt{Ra}}{L}$ come velocità che possiamo considerare caratteristica del flusso quando i termini inertiali (ovvero convettivi), viscosi (ovvero diffusivi) e di galleggiamento sono tutti ugualmente importanti, la procedura di adimensionalizzazione può essere fatta come segue:

$$\ell^* = L \Rightarrow \tilde{\ell} = \frac{\ell}{\ell^*}$$

$$u^* = \frac{\alpha\sqrt{Ra}}{L} \Rightarrow \tilde{u} = \frac{u}{u^*}$$

Ra = N° DI RAYLEIGH $= \frac{g\beta\Delta T L^3}{\alpha \cdot \nu} = \frac{\text{FORZE GALLEGG.}}{\text{FORZE ATTRITO VI.}}$

$$t^* = \frac{\ell^*}{u^*} = \frac{L^2}{\alpha\sqrt{Ra}} \Rightarrow \tilde{t} = \frac{t}{t^*}$$

α = DIFFUSIV. TERMICA $= \frac{\lambda}{\rho c_p}$

$$T^* = \Delta T \Rightarrow \tilde{T} = \frac{T}{\Delta T}$$

$$p^* = \rho(u^*)^2 = \rho\frac{\alpha^2 Ra}{L^2} \Rightarrow \tilde{p} = \frac{p}{p^*}$$

$$\omega^* = \frac{1}{t^*} = \frac{\alpha\sqrt{Ra}}{L^2} \Rightarrow \tilde{\omega} = \frac{\omega}{\omega^*}$$

$$\psi^* = \frac{u^*}{\ell^*} = \frac{\alpha\sqrt{Ra}}{L^2} \Rightarrow \tilde{\psi} = \frac{\psi}{\psi^*}$$

Utilizzando queste variabili la forma adimensionale delle equazioni del problema diventa

(*) NON SCRIVIAMO LE VARIABILI CON LA ~ PER SEMPLICITÀ DI NOTAZIONE

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega_z}{\partial t} + v_x \dfrac{\partial \omega_z}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial \omega_z}{\partial y} = \dfrac{Pr}{\sqrt{Ra}}\left(\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right) - Pr \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \omega = \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\ v_x = -\dfrac{\partial \psi}{\partial y} \; ; \; v_y = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} + v_x \dfrac{\partial T}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial T}{\partial y} = \dfrac{1}{\sqrt{Ra}}\left(\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \end{cases}$$

- $Pr = \dfrac{\nu}{\alpha}$
- $Ra = \dfrac{g\beta \Delta T \cdot L^3}{\alpha \cdot \nu} = Pr \cdot G$

[ADIM!]

Usiamo le stesse discretizzazioni delle derivate già viste per il caso di lid-driven cavity flow.

Ad es.:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x} = \frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{\Delta x^2}$$

Schema FTCS

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} = v_{x_{i,j}}^n \frac{T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n}{2\Delta x}$$

Pertanto l'eq. dell'energia discretizzata diventa:

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^n + \Delta t \left[- v_{x_{i,j}}^n \cdot \frac{T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n}{2\Delta x} - v_{y_{i,j}}^n \cdot \frac{T_{i,j+1}^n - T_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + \frac{1}{\sqrt{Ra}}\left(\frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \right]$$

• CONDIZIONI AL CONTORNO :

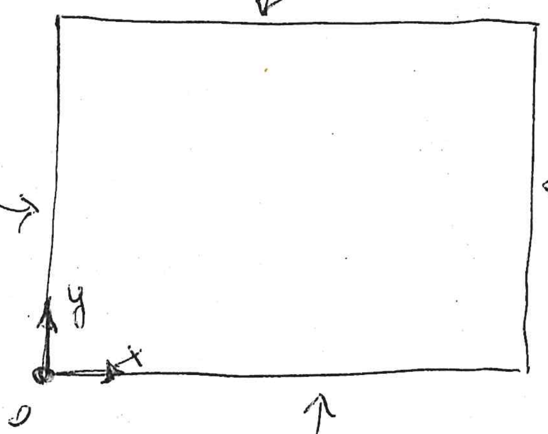
$v_x, v_y, \psi = 0$ + $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ e $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$

$v_x, v_y, \psi = 0$

+

$T = -1$

e $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$



$v_x, v_y, \psi = 0$

+

$T = +1$ [ADIM]

e $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$

$v_x, v_y, \psi = 0$

+

$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ e $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$

Per la vorticità si assumono le stesse condizioni al contorno del lid-driven cavity flow (solo che in questo caso $U = 0$!)

LID-DRIVEN CAVITY FLOW

Re = 100, 400, 1000, 2000, 5000, 7500 [10000?]

Grafici : $\omega, \psi, v_x, v_y, \psi_{max/min}$

BUOYANCY-DRIVEN CAVITY FLOW

$Pr = 1 \Rightarrow Ra = 500, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$

$Ra = 10^4 \Rightarrow Pr = 0.1, 0.5, 1, 2, 5$

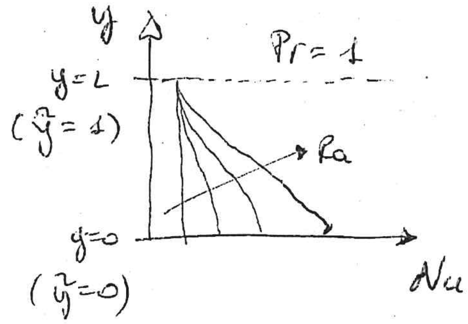
Griglie : 40×40 fino a $Ra = 10^4$

80×80 oltre a $Ra = 10^4$

Grafici : $\omega, \psi, v_x, v_y, T$ (isolivelli)

FACOLTATIVO : Andamento del numero di Nusselt alle pareti calda e fredda

$$\boxed{Nu = \left.\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}}\right|_{\tilde{x}=wall}}$$



$$Nu_H = \left.\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}}\right|_{\tilde{x}=1} \qquad Nu_C = \left.\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}}\right|_{\tilde{x}=0}$$

$$Nu = \frac{\text{flusso termico scambiato per convezione}}{\text{flusso termico scambiato per conduzione}}$$