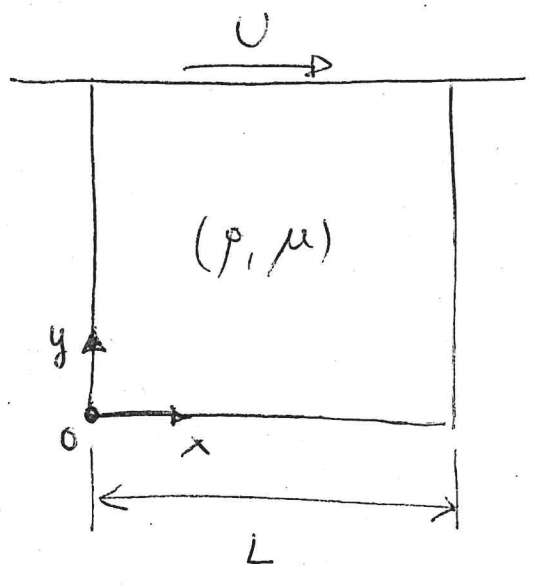


ESERCITAZIONE: FLUSSO IN CAVITA' QUADRATA



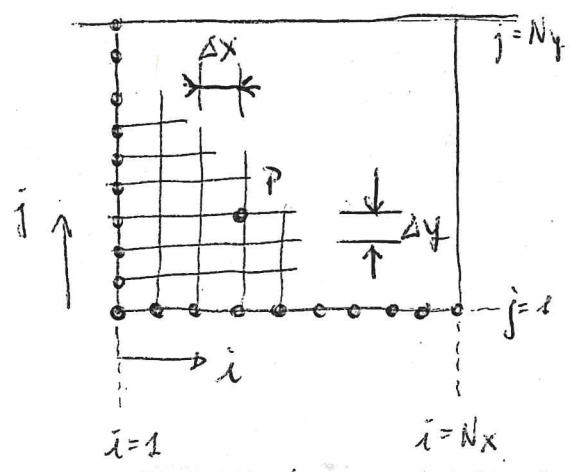
- $Re = \frac{U \cdot L}{\nu}$ $\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{w} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{w}$
- $\frac{\partial w}{\partial t} + \left[v_x \frac{\partial w}{\partial x} + v_y \frac{\partial w}{\partial y} \right] = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$
- $w = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$
- $v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$; $v_y = +\frac{\partial \psi}{\partial x}$

N.B. $\frac{\partial(v_x w)}{\partial x} + \frac{\partial(v_y w)}{\partial y} = v_x \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial v_y}{\partial y}$

$= v_x \frac{\partial w}{\partial x} + v_y \frac{\partial w}{\partial y} + w \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)$

$= \left[v_x \frac{\partial w}{\partial x} + v_y \frac{\partial w}{\partial y} \right]$

Discretizzazione del dominio: usiamo una griglia strutturata e uniforme



- ▶ Al punto P associa la coppia di indici i, j con $i = 1, \dots, N_x$ e $j = 1, \dots, N_y$.
- ▶ Le coordinate del punto P, X_p e Y_p , sono such'esse associate alla coppia i, j : $X_p(i, j)$; $Y_p(i, j)$

$\Delta x = \frac{L}{N_x - 1}$; $\Delta y = \frac{L}{N_y - 1}$

▶ Le comp. di velocità e di vorticità del fluido nel \square punto P sono associate alla coppia i, j :

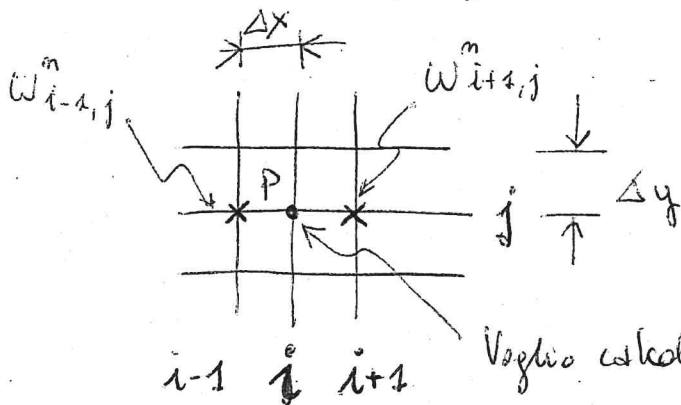
$$v_{x,P}(i,j), v_{y,P}(i,j), \omega_P(i,j) + \psi_P(i,j)!$$

Orvvero data una coppia di valori per i e per j , è questa corrisponde un unico punto P nella cavità, punto cui sono associati valori univoca di coordinate, velocità, vorticità e funzione di flusso!

• Discretizzazione delle derivate (schema FTCS)

$$\triangleright \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{w_{i,j}^{m+1} - w_{i,j}^m}{\Delta t} \quad \text{con } \Delta t = \text{passo temporale di integrazione dell'eq. di trasp.}$$

$$\triangleright v_x \frac{\partial w}{\partial x} = v_x^m \frac{w_{i+1,j}^m - w_{i-1,j}^m}{2\Delta x} = \underbrace{t_{m+1}}_{\text{istante temporale}} - \underbrace{t_m}_{\text{istante temporale}}$$



Voglio calcolare $v_x \frac{\partial w}{\partial x}$ qui! Mi servono: v_x nello stesso punto e i valori di vorticità a Δx e $-\Delta x$ di P!

Se volessi calcolare $\frac{\partial(v_x w)}{\partial x}$ invece di $v_x \frac{\partial w}{\partial x}$ scrivi:

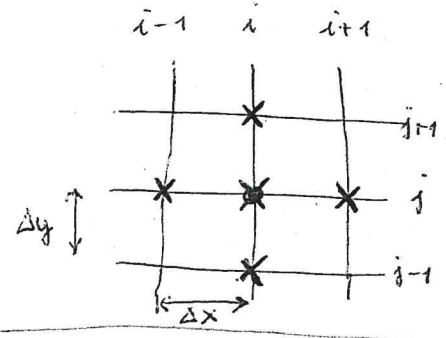
$$\triangleright \frac{\partial(v_x w)}{\partial x} = \frac{v_{x,ij}^m \cdot w_{i+1,j}^m - v_{x,i-1,j} \cdot w_{i-1,j}}{2 \Delta x}$$

$$\triangleright v_y \frac{\partial w}{\partial y} = v_{y,ij}^m \frac{w_{i,j+1}^m - w_{i,j-1}^m}{2 \Delta y}$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial(v_y w)}{\partial y} = \frac{v_{y,i,j+1}^m \cdot w_{i,j+1}^m - v_{y,i,j-1} \cdot w_{i,j-1}^m}{2 \Delta y}$$

$$\triangleright \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{w_{i+1,j}^m - 2w_{i,j}^m + w_{i-1,j}^m}{\Delta x^2}$$

$$\triangleright \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{w_{i,j+1}^m - 2w_{i,j}^m + w_{i,j-1}^m}{\Delta y^2}$$



Eq. del trasporto discretizzata:

$$w_{i,j}^{n+1} = w_{i,j}^n + \Delta t \left[\underbrace{-v_{x,ij}^m \frac{w_{i+1,j}^m - w_{i-1,j}^m}{2 \Delta x}}_{\text{"CONV"}} + \underbrace{-v_{y,ij}^m \frac{w_{i,j+1}^m - w_{i,j-1}^m}{2 \Delta y}}_{\text{"CONV"}} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\underbrace{\frac{w_{i+1,j}^m - 2w_{i,j}^m + w_{i-1,j}^m}{\Delta x^2}}_{\text{"DIFF"}} + \underbrace{\frac{w_{i,j+1}^m - 2w_{i,j}^m + w_{i,j-1}^m}{\Delta y^2}}_{\text{"DIFF"}} \right) \right] \quad [1]$$

Tutti i termini a dx sono noti. $w_{i,j}^{n+1}$ va calcolato $\forall i,j$

Per l'eq. di Poisson possiamo usare uno schema simile:

14

$$W_{i,j}^m = \frac{\Psi_{i+1,j}^m - 2\Psi_{i,j}^m + \Psi_{i-1,j}^m}{\Delta x^2} + \frac{\Psi_{i,j+1}^m - 2\Psi_{i,j}^m + \Psi_{i,j-1}^m}{\Delta y^2}$$

e da questa equazione vogliamo ricavare $\Psi_{i,j}^m$ usando $W_{i,j}^m$ dall'eq. di trasporto della reticolo discretizzata:

$$\Psi_{i,j}^m = \frac{1}{\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2}} \left[\frac{\Psi_{i+1,j}^m + \Psi_{i-1,j}^m}{\Delta x^2} + \frac{\Psi_{i,j+1}^m + \Psi_{i,j-1}^m}{\Delta y^2} + \Delta x^2 \cdot \Delta y^2 \cdot W_{i,j}^m \right] \quad [2]$$

L'eq. [2] si può risolvere tramite un metodo cosiddetto di SOVRARILASSAMENTO (S.O.R. = Successive Over-Relaxation) che consente di determinare la soluzione finale applicando iterativamente la seguente espressione:

$$q(m+1) = q(m) + \text{cost} \cdot [q^* - q(m)]$$

- chiamato WEIGHT nei calcoli

con q = soluzione ed m = iterazione.

15

Nel nostro caso: $q^{(m+1)} = \left(\psi_{ij}^m \right)_{m+1}$

$$q^{(m)} = \left(\psi_{ij}^m \right)_m$$

COSTANTE
DI SOVRA-RILASCIAMENTO

$$\text{COST} = \frac{2}{1 + \frac{\pi}{\sqrt{N_p}}}$$

Possibile
formula per
la cost. di
sovrarilascio.

$$q^* = C_1 \cdot \Delta \psi_{ij}$$

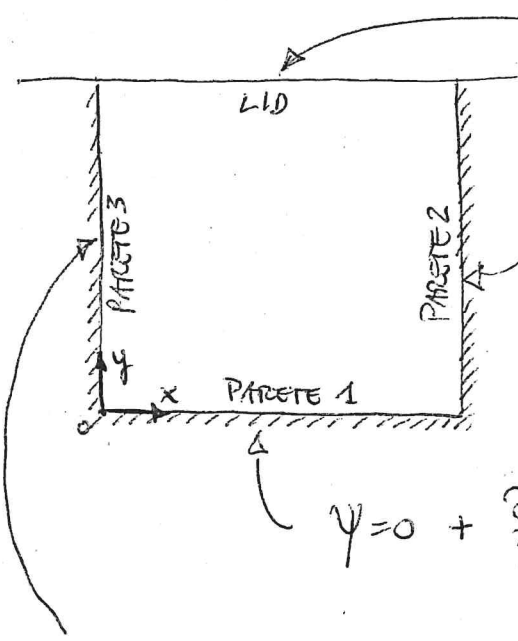
L'errore che si commette nel calcolo di ψ_{ij}^m durante l'iterazione m è calcolabile come:

$$\text{ERR} = \left[\left(\sum_{i=2}^{N_x-1} \sum_{j=2}^{N_y-1} \Delta \psi_{ij} \cdot \Delta \psi_{ij} \right) \cdot \frac{1}{(N_x-2)(N_y-2)} \right]^{0.5}$$

ovvero viene calcolato considerando lo scarto $\Delta \psi_{ij}$ per ciascun punto interno del dominio.

Il calcolo dell'errore serve a stabilire quando la soluzione dell'eq. [2] è giunta a convergenza ovvero quando si smette di iterare. La condizione che deve verificarsi è $\text{ERR} < \epsilon$ con ϵ piccolo a piacere ($\epsilon = 10^{-6}$)

• Condizioni al contorno : FUNZIONE DI FLUSSO



$$\psi = 0 + \frac{\partial \psi}{\partial y} = 1 \quad (\text{da } v_x = 0)$$

$$\psi = 0 + \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (\text{da } v_y = 0)$$

$$\psi = 0 + \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (\text{ viene dalla condizione di non scorrimento } v_x = 0)$$

$$\psi = 0 + \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (\text{da } v_y = 0)$$

In forma discreta :

• LID $\psi(i, j=N_y) = 0 \quad \forall i \in [1, N_x]$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(i, j=N_y) = 1 \quad \forall i \in [1, N_x]$$

• PARETE 1 $\psi(i, j=1) = 0 \quad \forall i \in [1, N_x]$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(i, j=1) = 0 \quad \forall i \in [1, N_x]$$

• PARETE 2 $\psi(i=N_x, j) = 0 \quad \forall j \in [1, N_y]$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(i=N_x, j) = 0 \quad \forall j \in [1, N_y]$$

• PARETE 3 $\psi(i=1, j) = 0 \quad \forall j \dots$

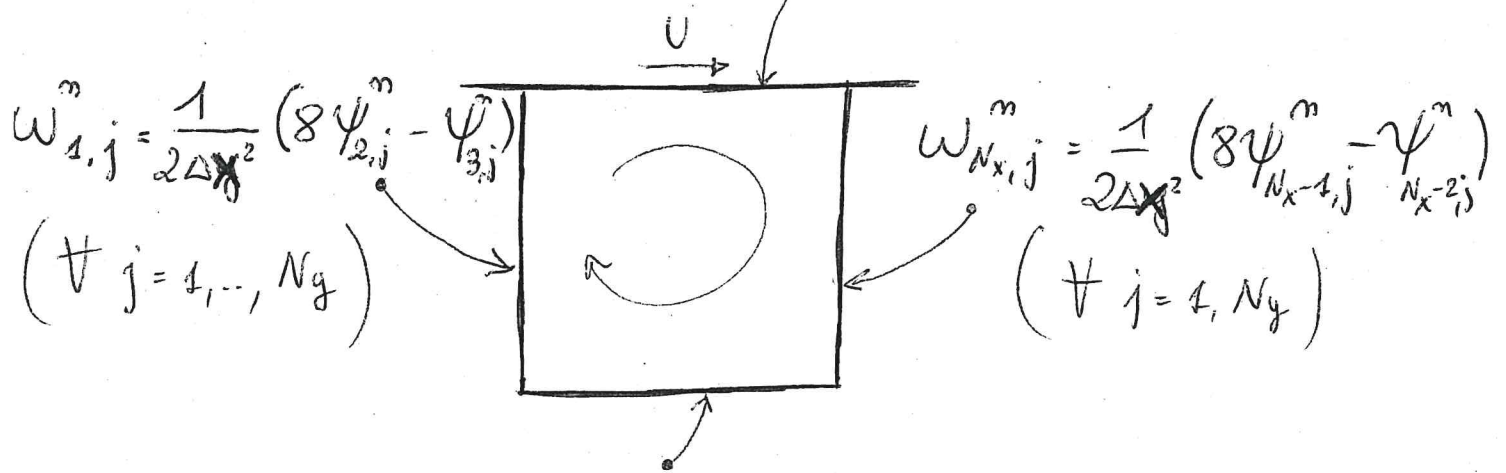
$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(i=1, j) = 0 \quad \forall j \dots$$

• Condizioni al contorno: VORTICITÀ

L'eq. [1] viene risolta per i soli modi interni al dominio ($i = 2, \dots, N_x - 1$ e $j = 2, \dots, N_y - 1$), per cui ai bordi ($i = 1$ o $i = N_x$ e $j = 1$ o $j = N_y$) è neces-

sario imporre i valori di vorticità tramite appropzionate c.c.:

$$\left(\forall i = 1, \dots, N_x \right) \omega_{i, N_y} = \frac{1}{2\Delta y^2} \left(8\psi_{i, N_y - 1}^m - \psi_{i, N_y - 2}^m \right) + \frac{3U}{\Delta y}$$



C.C. ACCURATE AL II° ORDINE!

$$\omega_{i, 1} = \frac{1}{2\Delta y^2} (8\psi_{i, 2}^m - \psi_{i, 3}^m) \quad \forall i = 1, \dots, N_x$$

Queste c.c. si ottengono tramite espansione in serie di Taylor delle funzioni di corrente attorno ai nodi di frontiera del dominio. E' facile ricavare l'espressione della c.c. accurate al primo ordine:

espressione in serie di Taylor attorno al nodo (i, N_y) 8
 ovvero sulla parete superiore:

$$\psi_{i, N_y-1}^n = \psi_{i, N_y}^n - \Delta y \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{i, N_y}^n + \frac{\Delta y^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_{i, N_y}^n$$

Ord: $\psi_{i, N_y}^n = 0$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{i, N_y}^n = 1 \quad \text{essendo } v_x = U \quad \left[\text{In generale: } \frac{\partial \psi}{\partial y} = g \right]$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{i, N_y}^n = 0 \quad \text{essendo } v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{sulla}$$

parete superiore

$$\hookrightarrow \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_{i, N_y}^n = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right]_{i, N_y}^n = 0$$

vale 0 nei nodi (i, N_y)

$$\hookrightarrow \text{Da Poisson: } w_{i, N_y}^n = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_{i, N_y}^n + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_{i, N_y}^n$$

\downarrow
= 0

$$\hookrightarrow w_{i, N_y}^n = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_{i, N_y}^n$$

Sostituendo nell'espressione di Taylor:

$$\psi_{i, N_y-1}^n = -\Delta y \cdot 1 + \frac{\Delta y^2}{2} w_{i, N_y}^n$$

da cui:

$$W_{i,N_y}^m = \frac{2}{\Delta y^2} \cdot \psi_{i,N_y-1}^m + \frac{2}{\Delta y}$$

C.C. ACCURATA
AL 1° ORDINE
[+ O(Δy)]

Poiché le eq. [1] e [2] sono risolte con schemi accurati al II° ordine, è consigliabile utilizzare C.C. col medesimo ordine di accuratezza per cui si utilizzano C.C. ricavate da espansioni in serie di Taylor dove vengono tenuti più termini. Adesso:

$$W_{i,j}^m = \frac{1}{2\Delta y^2} \left(8\psi_{i,j-1}^m - \psi_{i,j-2}^m \right) + \frac{3g}{\Delta y} + O(\Delta y^2)$$

\downarrow
 $\circ \Delta x^2 \nabla$

t.o.s.

ALGORITMO RISOLUTIVO

1. CONDIZIONI INIZIALI : $W_{i,j} = 0 \quad \forall i=2, \dots, N_x ; j=2, \dots, N_y$
 (t=0)

$(v_x)_{i,j} = 0$	"	"
$(v_y)_{i,j} = 0$	"	"
$\psi_{i,j} = 0$	"	"

2. DALLA C.C. SULLA PARETE SUPERIORE AVREMO :
 (t=0) $W_{i,N_y} = \frac{3U}{\Delta y} \neq 0 \leftarrow$ da qui parte tutto!

3. DALLE C.C. SULLE ALTRE PARETI TRAVERSE

10

solo:

$$\textcircled{t=0}$$

$$w_{1,j} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, N_y$$

$$w_{N_x,j} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, N_y$$

$$w_{i,1} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N_x$$

4. POSSIAMO COMINCIARE A RISOLVERE L'EQ. DEL TRASPORTO [1] PER CALCOLARE w NEI PUNTI INTERNI DEL DOMINIO AL PRIMO PASSO TEMPORALE

5. NOTO IL VALORE DI $w_{i,j}$ DOPO IL PRIMO PASSO TEMPORALE ($m=1$) POSSIAMO RISOLVERE POISSON PER RICAVARE $\psi_{i,j}$ AL PASSO $m=1$ NEI PUNTI INTERNI DEL DOMINIO

6. NOTO IL VALORE DI $\psi_{i,j}$ AL PASSO $m=1$ SFRUTTIAMO LE RELAZ. DI CAUCHY-RIEMANN PER CALCOLARE LE COMP. DI VELOCITA':

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \leadsto \quad (v_x)_{i,j}^m \approx -\frac{\psi_{i,j+1}^m - \psi_{i,j-1}^m}{2\Delta y}$$

$$v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \leadsto \quad (v_y)_{i,j}^m \approx \frac{\psi_{i+1,j}^m - \psi_{i-1,j}^m}{2\Delta x}$$

$$\forall i = 2, \dots, N_x ; j = 2, \dots, N_y$$

7. RICALCOLIAMO LA VORTICITA' SUI BORDI DEL DOMINIO (prima o poi i valori di ψ sul I° e II° punto interno al dominio diventeranno diversi da zero)

8. TORNIAMO AL PUNTO 4. E RIPETTIAMO IL CICLO ∇ PASSO TEMPORALE $m > 1$.

Quando si ferma il calcolo? Quando viene raggiunto lo stato stazionario per la vorticita' all'interno delle celle, ovvero quando $W_{i,j}^{m+1} - W_{i,j}^m < \epsilon$ con ϵ errore piccolo a piacere. La condizione che deve verificarsi per fermare la simulazione e':

CONDIZIONE DI STAZIONARIETA' $ERR = \left[\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} (W_{i,j}^{m+1} - W_{i,j}^m) \right] \frac{1}{N_x \cdot N_y} < \epsilon$

Senza questo se si vuol essere piu' restrittivi si parla di ϵ PDE.

NOTA: Come si sceglie il Δt del passo temporale?

In base al valore del NUR.

DI COURANT: Questo vincolo garantisce la STABILITA' dell'algoritmo di risoluz. ed assicura la CONVERGENZA della soluzione

$Co_x = U_x \frac{\Delta t}{\Delta x} < 0.3$; $Co_y = v_y \frac{\Delta t}{\Delta y} < 0.3$